

EXERCICE 1 (6 points)

1/ Soit f une fonction continue et T -périodique ($T \geq 0$).

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

2/ Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$\int (xe^x + e^x \sin x) dx.$$

EXERCICE 2 (8 points)

$$\text{Soit } f(x) = \left(\frac{\sin\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \ln(1+x)}{x^3} \right)^2 \left(e^{\frac{1}{1+x^2}} - 1 \right).$$

1/ Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

2/ Etudier la nature de $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

EXERCICE 3 (6 points)

Soit l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (E)

1/ Trouver la valeur de n dans \mathbb{N}^* pour que $P(x) = x^n$ soit solution de (E).

2/ On pose $y(x) = P(x)Z(x)$ où y est une solution de (E).

Montrer que Z est une solution d'une équation différentielle à déterminer

3/ Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle (E).