ESI/CPI **Analyse II** 2009 – 2010

Epreuve Semestrielle

EXO A (6 pts)

On considère la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1/2, \text{ et } \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n^2 + \frac{1}{2}$$

1°) Montrer que $u_n \leq 1$, $\forall n \geq 0$.

2°) Etudier la monotonie de (u_n).

3°) Déterminer la nature de (u_n)
(Si (u_n) c.v, determiner sa limite)

4°) Que peut-on dire sur la nature de (u_n) si on prend $u_0 > 1$
devergé

EXO B (7 pts)

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$, tq $f_n(x) = \dfrac{n e^{x} + x e^{-x}}{n + x}$, $x \geq$

1°) Etudier la convergence simple de $(f_n(x))$, $n \geq 1$.

2°) Rappeler la définition de la convergence uniforme sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

3°) Montrer que $|f_n(x) - e^{x}| \leq \dfrac{e}{n}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$

4°) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (x^3+1) \cdot f_n(x)\, dx$. Justifier

EXO C (7 pts)

On considère la série de fonctions $\sum u_n(x)$, où $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^{3/2}}$, $n \geq 1$

1°) Déterminer le domaine de convergence simple, noté D_S.

2°) Est-ce que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue dans D_S ?

3°) Sachant que : $\exists K > 0, \exists a > 0$ tq $|\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx| \leq K$
$\forall n \geq 1$ et $\forall x \in [a, \pi - a]$. Etudier la dérivabilité de de $F(x)$ dans $[a, \pi - a]$.

EXO D (2 pts)

Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2} \cdot x^n$$