

Exercice 1 (10 points)

Soit $E = \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

1/ Montrer que $E = A \cup B$ où A et B sont deux parties de \mathbb{R} .

2/ Montrer que A et B sont bornées.

3/ Etudier l'existence de $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$.

4/ Est-ce que $\max E$, $\min E$ existent?

5/ Déterminer $\sup E$, $\inf E$.

Exercice 2 (6 points)

Sur \mathbb{R}^2 , on définit la relation binaire \mathcal{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow y = y'$$

1/ Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer la classe d'équivalence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (4 points)

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$

Rappel : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1.2.3.\dots.n$ et $0! = 1$