E.S.I. 26 janvier 2014 **Examen n°1** **ALG1** 1CPA et 1CPB.

Durée : 2h

L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (4 pts) Soit la loi $\star$ sur $[0,+\infty[$ définie par :

$$\forall x, y \in [0,+\infty[: x \star y = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1. Étudier l'associativité et la commutativité de $\star$, l'existence d'un élément neutre et l'existence du symétrique d'un élément.
2. Pour $(n,a) \in \mathbb{N}^* \times [0,+\infty[$, calculer $\underbrace{a \star a \cdots \star a}_{n \text{ fois}}$.
3. Soient $x, y \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\underbrace{(x\star y)\star(x\star y)\cdots\star(x\star y)}_{n^2 \text{ fois}}$.

P

Exercice 2 : (6 pts)

(A) Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $a, b, P(a)$ et $P(b)$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $a, P(a)$ et $P'(a)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X-a)$?.

(B)

1. Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X-1)^2$.
2. Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 3 : (10 pts)

(A) Soient $A = X^4 + X^3 - 5X^2 + 5X - 1$ et $B = X^4 + X^3 - 6X^2 + 6X - 2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\mathrm{PGCD}(A,B) = 1$.
2. Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $1 = AU + BV$.

(B) Soit le polynôme $P = X^{10} + 2X^8 - 2X^7 + X^6 - 4X^5 + X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que $1, i, j$ sont des racines de P et donner leur ordre de multiplicité.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

(C) Soit le polynôme $C = X^9 - 4X^8 + 2X^7 + X^2 - 3X$.

1. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire de degré 2 tel que $Q(2+\sqrt{2}) = 0$.
2. Calculer $C(2+\sqrt{2})$.