E.S.I. 23 Janvier 2013 **ALG1** **Examen Semestriel** 1CPA, 1CPB **Durée : 2h**

N.B : Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Les réposes doivent être justifiées.

Exercice 1 : (6 pts)

On rappelle la notation usuelle $j = e^{2i\pi/3}$ et on pose $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1- Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$. Est-ce un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$?

2- Vérifier que $\forall z \in \mathbb{Z}[j], |z|^2 \in \mathbb{N}$.

3- Déterminer l'ensemble U_6 des racines de $P = X^6 - 1$, on exprimera ces racines en fonction de j.

4- En déduire la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

5- Montrer que $\mathbb{Z}[j]^\times = U_6$, où $\mathbb{Z}[j]^\times$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.

Exercice 2 : (8pts)

I/ Soit le polynôme $A = X^7 - 3X^6 - 2X^4 + 6X^3 + X - 3$.

1- Vérifier que j est une racine de A, où $j = e^{2i\pi/3}$, et donner sa multiplicité.

2- En déduire la factorisation de A en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II/ Soit (P_n) la suite de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ définie par:

$$\begin{cases} P_0 = 2, P_1 = X; \\ P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1- Calculer P_2 et P_3 puis montrer que P_n est un polynôme unitaire de degré n, si $n \geq 1$.

2- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on a $x^n + \dfrac{1}{x^n} = P_n(y)$ où $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P(x) = x^2(y^2 + ay + b - 2), \text{ où } y = x + \frac{1}{x}.$$

4- Trouver les racines complexes du polynôme $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

Exercice 3 : (6pts)

Soit E un ensemble non vide et soit $P(E)$ l'ensemble des parties de E. On rappelle que pour un sous-ensemble F de E la notation CF désigne le complémentaire de F dans E. $CA = \bar{A}$

On définit dans $P(E)$ une loi de composition interne notée $*$ par :

$$\forall A, B \in P(E) : A * B = CA \cap CB.$$

1- La loi $*$ est-elle commutative? associative? admet elle un élément neutre ?

2- Exprimer CA, $A \cap B$, $A \cup B$, E, $\varnothing$ uniquement en fonction de A, B et du symbole $*$.

3- Simplifier : $[(A * A) * (A * A)] * [(A * A) * (A * A)]$.

4- Résoudre dans $P(E)$ les équations : $X * E = E$, $X * \varnothing = CX$ et $X * E = \varnothing$.

Bon Courage