Exercice 1 : (10.5 pts)

I/ Soit P un polynôme impair à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : P^{(n)}(X) = (-1)^{n+1} P^{(n)}(-X)$, où $P^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de P.

Solution : il suffit d'utiliser la récurrence. **(1 pt)**

2/ Déduire que : Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité m ($m \in \mathbb{N}^*$), alors $-\alpha$ est aussi racine de P de multiplicité m.

Solution : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité m ($m \in \mathbb{N}^*$), donc :

$$P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ pour tout } k \in [[0, m-1]] \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

D'après la 1ère question, on a : $P^{(n)}(\alpha) = (-1)^{n+1} P^{(n)}(-\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$P^{(k)}(-\alpha) = 0 \text{ pour tout } k \in [[0, m-1]] \text{ et } P^{(m)}(-\alpha) \neq 0.$$

Donc $-\alpha$ est aussi racine de P de multiplicité m. **(1.5 pt)**

II/ Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ donnés par :

$$A = X^9 + 2X^7 + 3X^5 + 2X^3 + X \text{ et } B = X^6 - 4X^5 + 8X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1$$

1/ a/ Montrer que $\alpha = j$ est une racine de A, puis déterminer son ordre de multiplicité. (On rappelle que j est le nombre complexe, de partie imaginaire positive, racine de $X^2 + X + 1$).

Solution : On a :

$$\begin{aligned} A(j) &= j^9 + 2j^7 + 3j^5 + 2j^3 + j \\ &= 1 + 2j + 3(-1-j) + 2 + j = 0 \text{ (on utilise : } j^3 = 1,\ j^2 = -1-j). \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

En dérivant A et en utilisant les proporiétés de j, on trouve :

$$A'(j) = 0 \text{ et } A^{(2)}(j) \neq 0.$$

Cela veut dire que la multiplicité de j est égale à 2. **(1.5 pt)**

b/ Montrer que $\beta = -j$ est une racine de B, puis déterminer son ordre de multiplicité.
Solution : Après calculs, on trouve $B(-j) = 0$ **(0.5 pt)**
En dérivant B et en utilisant les proporiétés de j, on trouve :

$$B'(j) = 0 \text{ et } B^{(2)}(-j) \neq 0.$$

Cela veut dire que la multiplicité de $-j$ est égale à 2. **(1 pt)**

2/ En déduire :

a/ La factorisation de A et de B dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. (Remarquer que A est impair).

Solution : Le fait que $\alpha = j$ est une racine de A de multiplicité 2 et que A est à coefficients réels entraine que $\overline{j}$ est aussi racine de A de multiplicité 2, de plus A est impair et en utilisant la question I-2, on déduit que $-j$ est racine de A de multiplicité 2, et il en est de même pour $-\overline{j}$.

Il est très important de préciser que $j, \overline{j}, -j$ et $-\overline{j}$ sont distincts deux à deux. Ainsi on déduit que :

$$\left(X^2 + X + 1\right)^2 \text{ divise } A \text{ et que } \left(X^2 - X + 1\right)^2 \text{ divise } A.$$

Enfin, avec la remarque que 0 est racine de A, on déduit la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$:

$$A = X\left(X^2 - X + 1\right)^2\left(X^2 + X + 1\right)^2. \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$, A se factorise :

$$A = X(X - j)^2\left(X - \overline{j}\right)^2(X + j)^2\left(X + \overline{j}\right)^2. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

En utilisant le même raisonnement pour B, on déduit que $\left(X^2 - X + 1\right)^2$ divise B. Comme B est degré 6, alors pour le factoriser soit qu'on remarque que 1 est racine double de B ou qu'on effectue la division euclidienne de B par $\left(X^2 - X + 1\right)^2$. La factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$ est alors :

$$B = (X - 1)^2\left(X^2 - X + 1\right)^2. \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$, B se factorise :

$$B = (X - 1)^2(X + j)^2\left(X + \overline{j}\right)^2. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

b/ $PGCD(A, B)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Solution : On déduit de la factorisation de A et B dans $\mathbb{R}[X]$:

$$PGCD(A, B) = \left(X^2 - X + 1\right)^2. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 2 : (7 pts) Les questions 1/, 2/ et 3/ sont indépendantes

1/ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) = 1$, $P(b) = -2$ et $P'(a) = 1$.

i/ Supposons que a et b sont distincts. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a et b.

Solution : La division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ entraine l'existence d'un couple unique $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ vérifiant :

$$P = (X-a)(X-b)Q + R \text{ avec } \deg R < \deg (X-a)(X-b) \text{ i.e. } \deg R < 2.$$

D'où le reste R s'écrit : $R = \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi :

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$$

On remplace par a et b, on trouve :

$$P(a) = \alpha a + \beta \text{ et } P(b) = \alpha b + \beta, \text{ i.e : } \alpha a + \beta = 1 \text{ et } \alpha b + \beta = P(b) = -2.$$

On trouve donc : $\alpha = \dfrac{3}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{-2a-b}{a-b}$ i.e. : $R = \dfrac{3}{a-b}X + \dfrac{-2a-b}{a-b}$. **(2 pts)**

ii/ Qu'en est-il si a et b sont égaux ?.

Solution : On aura toujours :

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$$

Mais dans ce cas, on a :

$$P(X) = (X-a)^2 Q + \alpha X + \beta$$

On dérive P :

$$\begin{aligned} P'(X) &= \left[(X-a)^2 Q + \alpha X + \beta\right]' \\ &= 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q' + \alpha \end{aligned}$$

On remplace par a, on obtient : $P'(a) = \alpha = 1$.

Pour obtenir β, on remplace a dans l'expression de P, on obtient :

$$P(a) = \alpha a + \beta \text{ i.e. : } 1 = a + \beta \text{ d'où : } \beta = 1 - a.$$

Ainsi $R = X + 1 - a$. **(1 pt)**

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit le polynôme : $Q = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1} \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que Q est divisible par $X^2 - X + 1$.

Solution : Comme Q est à coefficients réels et $j, \overline{j}$ sont les racine de $X^2 - X + 1$, il faut et il suffit de montrer $Q(-j) = 0$.

En effet :

$$Q(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = j^{2(n+2)} - j^{2n+1} = j^{2n+4} - j^{2n+1} = j^{2n+1} - j^{2n+1} = 0. \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

3/ Soient A et B deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et S un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$. Montrer :

Si S divise $A.B$ alors S divise A ou S divise B.

Solution : Supposons que S divise $A.B$, et montrons que S divise A ou S divise B. Pour cela, supposons que S ne divise pas A et montrons que S divise B, (On utilise l'équivalence: $(P \Rightarrow Q \vee R) \Leftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q} \Rightarrow R\right)$).

Les hypothèses S ne divise pas A et S irréductible entrainent : $PGCD(S, A) = 1$. En effet si on suppose que $PGCD(S, A) = D$, avec $D \in \mathbb{K}[X]$ alors D divise S, i.e. $D = 1$ ou D associé à S. Comme S ne divise pas A alors $D = 1$.

Enfin, on applique le théorème de Gauss : S divise $A.B$ et $PGCD(S, A) = 1$ alors S divise B. C.Q.F.D.. **(2.5 pt)**

Exercice 3 : (2.5 pts)

Soient $(G, .)$ un groupe et G_1, G_2 deux sous-groupes de G.

Montrer que **:** $G_1 \cup G_2$ sous-groupe de G si et seulement si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Solution : i/ $(G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1) \Rightarrow G_1 \cup G_2$ sous-groupe de G car $G_1 \cup G_2 = G_1$ ou $G_1 \cup G_2 = G_2$. **(0.5 pt)**

ii/ Montrons maintenant $G_1 \cup G_2$ sous-groupe de G entraine $(G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1)$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe x, y tels que :

$$(x \in G_1 \text{ et } x \notin G_2) \text{ et } (y \in G_2 \text{ et } y \notin G_1).$$

Mais $G_1 \cup G_2$ sous-groupe de G, donc $x + y \in G_1 \cup G_2$ i.e. $x + y \in G_1$ ou $x + y \in G_2$.

Si $x + y \in G_1$ entraine $(x + y) - x = y \in G_1$ car G_1 est un sous-groupe de G, absurde puisque $y \notin G_1$.

Si $x + y \in G_2$ entraine $(x + y) - y = x \in G_2$ car G_2 est un sous-groupe de G, absurde puisque $x \notin G_2$.CQFD. **(2 pts)**