Examen Semestriel

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

Exercice 1 : (Les questions sont indépendantes) (9 pts)
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, tel que : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1- Monter que tout polynôme de degré $n \geq 1$ admet au plus n racines.
2- Soient les deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ suivants :

$$A = X^5 + aX^2 + b \text{ et } B = X^3 + X^2 + cX + 1.$$

a/ Effectuer la division euclidienne de A par B.
b/ Déterminer, quand ils existent, a, b et c pour que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$.
c/ Déterminer, quand ils existent, a, b et c pour que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$.
3- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et θ un nombre complexe non réel, et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si θ est une racine de P de multiplicité m alors $\overline{\theta}$ est une racine de P de multiplicité m, ($\overline{\theta}$ désigne le conjugué de θ).
4- On pose : $\alpha = j$, $\beta = i$ et $\lambda = 1$ (on rappelle que i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$ et j est le nombre complexe de partie imaginaire positive et racine de $X^2 + X + 1$), et soient les deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ suivants :

$$\begin{aligned} P &= X^7 + 2X^6 + 3X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 2X - 1 \text{ et} \\ Q &= X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1 \end{aligned}$$

a/ Montrer que α et λ sont racines de P et donner la multiplicité de chacune d'elles.
b/ Montrer que β et λ sont racines de Q et donner la multiplicité de chacune d'elles.
c/ En déduire la factorisation de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ ainsi que $PGCD(P, Q)$.

Exercice 2 : (5 pts)
On considère le corps commutatif $(\mathbb{C}, +, .)$, et soit :

$$A = \mathbb{Z}[i] = \left\{ a + ib : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } i \text{ est le nombre complexe vérifiant } i^2 = -1 \right\}.$$

1- Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2- Soit $z \in A$. Montrer que : $\overline{z} \in \mathbb{Z}[i]$ et que $|z|^2 \in \mathbb{N}$, ($\overline{z}$ désigne le conjugué de z).
3- Soit $z \in A$. Montrer que : z est invesible si et seulement si $|z|^2 = 1$.
4- En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3 : (Les questions sont indépendantes) (6 pts)

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif unitaire d'élément neutre 0 et d'unité 1, avec $0 \neq 1$, et soit I une partie de A. On dit que I est un idéal de A si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i/ I sous groupe de $(A, +)$.

ii/ Pour tout $a \in A$ et pour tout $x \in I$: $a.x \in I$.

1- Montrer que si $1 \in I$ alors $I = A$.

2- Soit $f : (A, +, .) \to (A, +, .)$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $\ker f$ est un idéal de A.

3- On pose : $A = \mathbb{Z}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I = n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

4- On pose : $A = \mathbb{R}[X]$ et B un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. On définit une relation binaire R sur $\mathbb{R}[X]$ comme suit :

$$\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}[X])^2 : (P_1 \; R \; P_2 \Leftrightarrow B \text{ divise } P_1 - P_2).$$

a/ Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$.

b/ Déterminer $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

c/ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que B divise P. Déterminer $\overline{P}$, puis montrer que $\overline{P}$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

Bon courage