ESI/CPI

2013/2014

Analyse (1)

Examen Semestriel, Durée : 2 H

Exercice 1. (5 points) Soit $A = \{\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{\pi}{m}) : m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

1) Montrer que : A est borné.
2) Déterminer sup A et Inf A.
3) Est-ce que Max A et Min A existent ?

Exercice 2. (8 points)

Soit (Un) la suite numérique définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = 1 - (U_n)^2$, $n \geq 0$.

1) Donner f(x) tq $U_{n+1} = f(U_n)$.
2) Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$, et en déduire que $0 \leq U_n \leq 1$, pour $n \geq 0$.
3) Etudier le sens de variation de f sur [0 ,1].
4) Résoudre l'équation f(x)=x dans [0 ,1].
5) Soit λ la solution de l'équation ci-dessus, montrer que : $u_{2n} \leq \lambda \leq u_{2n+1}$ pour $n \geq 0$.
6) Etudier la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
7) Est-ce que (u_n) est convergente ?
8) Résoudre (fof) (x) = x dans [0 ,1]. *On notera que : f(x) = x => (fof) (x) = x , pour x dans IR.*
9) En déduire la nature de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 3 (7 points)

Soient a,b,c ϵ IR et $f(x) = \begin{cases} \exp(ax^2 + bx + c) \text{ si } & x \geq 0 \\ \exp(x) \text{ si } & x < 0 \end{cases}$

1) Donner une condition sur a,b,c pour que f soit continue en $x_0 = 0$.

2) Donner une condition sur a,b,c pour que f soit dérivable en $x_0 = 0$.

(On calculera $f_d'(0)$ et $f_g'(0)$)

3) Donner une condition sur a,b,c pour que f présente un max-local .

4) Déterminer a pour que f présente un max-local en $x_0 = 2$.

5) a , b , c étant fixés par les questions 1) , 2) , 3) , 4) ci-dessus , quel est le nombre d'extremums de f ?