Exercice 1 (4 points)

Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et telles que, $\forall x \in A, \forall y \in B : x \leq y$

1/ Prouver l'existence de $\sup(A)$ et $\inf(B)$ et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

2/ Montrer que, $\sup(A) = \inf(B) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \gneqq 0, \exists x \in A, \exists y \in B : |x - y| \lneqq \varepsilon$

Exercice 2 (6 points)

Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par, $U_0 = 1, V_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{U_n^2}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{V_n^2}{U_n + V_n}$$

1/ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $V_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2/ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = U_{n+1} - U_n$ et $W_n = V_{n+1} - V_n$.
Montrer que, les termes de la suite (S_n) ont le même signe, de même pour (W_n).

3/ Montrer que, (U_n) et (V_n) sont monotones.

4/ En déduire que, (U_n) et (V_n) sont convergentes.

5/ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N} : V_n - U_n = 1$.

6/ Préciser les limites de (U_n) et (V_n).

Exercice 3 (10 points)

1/ Soit $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que, $d^\circ P_n = n, n \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de $P_n(x)$, à l'ordre n, au point $x_0 \in \mathbb{R}$, fixé.

2/ Soit $f(x) = \sin(x)$.
i/ Donner la formule de Taylor-Lagrange de f au point $x_0 = 0$, à l'ordre 4 et à l'ordre 5
ii/ En déduire un encadrement de $f(x)$, de la forme, $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$, où $(A(X), B(X)) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $3 \leq d^\circ A \leq 5$ et $3 \leq d^\circ B \leq 5$

3/ Soit $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a et b dans $\mathbb{R}$ pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

4/ Soit $\phi(x) = \phi(x_0) + a(x - x_0)^k + \circ\left((x - x_0)^k\right)$ au $V(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ présente un extrémum en x_0, préciser sa nature.