E.S.I / 1CPI 29 janvier 2012 Examen final ANA1 Durée : 2H

Exercice 1 (5 points)

Soit $E = \left\{ \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + (-1)^n n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

1/ Ecrire E sous la forme $E = A \cup B \cup C$, oú A, B, C sont des ensembles à déterminer.

2/ En déduire que E est borné.

3/ Determiner $\sup E$, $\inf E$, $\max E$ et $\min E$ s'ils existent.

Exercice 2 (7 points)

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{a^2}{U_n}\right) \end{cases} \quad \text{oú } n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \mathbb{R}_+^*$$

1/ Donner la fonction f telle que, $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$.

2/ a/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ $f(x) = x$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ $f(x) \leq x$.

3/ Montrer que, $\forall\ U_n \in \mathbb{R}_+^* : U_{n+1} \geq a$.

4/ Trouver un domaine $D \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que, $f(D) \subset D$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n \in D$

5/ Déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3 (4 points)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $(l \in \bar{\mathbb{R}})$, $l \neq f(0)$.

Montrer que, f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et l (l exclu).

Exercice 4 (4 points)

Soit f une fonction 4 fois dérivable sur $[a,b]$, $a \neq b$.

(c'est à dire, f admet une dérivée d'ordre 4 sur $[a,b]$)

On suppose qu'il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in [a,b]^5$ tel que, $f(a_i) = 0$, $0 \leq i \leq 4$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que, $f^{(4)}(\alpha) = 0$.

Peut-on généraliser pour tout $n \in \mathbb{N}$?