E.S.I. **Novembre 2012**
1CPA et 1CPB.
Module : Algèbre I.

Corrigé du Contrôle Intermédiaire

Exercice 1 : (14 pts)

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on considère la loi de composition suivante :

$$x * y = x + y - xy \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

I/ 1- Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que $x + y - xy \neq 1$.

Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et supposons que $x * y = 1$.

$$\begin{array}{rcl} x * y = 1 & \Longleftrightarrow & x + y - xy = 1 \\ & \Longleftrightarrow & x(1-y) + y - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (1-y)(x-1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & y = 1 \text{ ou } x = 1. \end{array}$$

D'où $x * y \neq 1$ car par hypothèse $x \neq 1$ et $y \neq 1$. **(1 pts)**

2- Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe abélien.

i) On déduit de la question précédente que $*$ est une LCI dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **(0,5 pts)**

ii) Soient $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{array}{rcl} (x * y) * z & = & (x + y - xy) * z \\ & = & (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ & = & x + y - xy + z - xz - yz + xyz \\ & = & x + (y + z - yz) - xy - xz + xyz \\ & = & x + (y * z) - x(y + z - yz) \\ & = & x + (y * z) - x(y * z) \\ & = & x * (y * z). \end{array}$$

D'où $*$ est associative. **(1 pts)**

iii) Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{array}{rcl} x * y & = & x + y - xy \\ & = & y + x - yx \\ & = & y * x. \end{array}$$

D'où $*$ est commutative. **(0,5 pts)**

iv) Supposons qu'il existe $e \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $x * e = x$, alors :

$$\begin{array}{rcl} x * e = x & \Longleftrightarrow & x + e - xe = x \\ & \Longleftrightarrow & e - xe = 0 \\ & \Longleftrightarrow & e(1-x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & e = 0 \ \ (\text{car } x \neq 1). \end{array}$$

D'où $e = 0$ est un élément neutre. **(1 pts)**

v) Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, il existe $x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $x * x' = 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} x * x' = 0 & \Longleftrightarrow & x + x' - xx' = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x'(1-x) = -x \\ & \Longleftrightarrow & x' = \dfrac{x}{x-1} \quad (\text{car } x \neq 1). \end{array}$$

D'où, tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour symétrique $x' = \dfrac{x}{x-1}$. **(1 pts)**

<u>Conclusion</u> : $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe abélien.

3- Soit $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ l'application définie par $f(x) = 1 - (1/x)$.

a) Montrer que f est un morphisme de groupes.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) * f(y) & = & \left(1 - \frac{1}{x}\right) * \left(1 - \frac{1}{y}\right) \\ & = & \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{y} - 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{xy} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{xy} \\ & = & f(x \cdot y). \end{array}$$

D'où f est un morphisme de groupes. **(1,5 pts)**

b) Calculer $\ker(f)$.

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & = & \{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}^* : 1 - \dfrac{1}{x} = 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}^* : 1 = \dfrac{1}{x}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}^* : x = 1\} \\ & = & \{1\}. \end{array}$$

D'où $\ker(f) = \{1\}$. **(1,5 pts)**

c) Montrer que f est un isomorphisme de groupes.

i) D'après la question précédente on a $\ker(f) = \{1\}$, on en déduit que f est un morphisme injectif. **(1 pts)**

Montrons que f est surjectif. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = f(x)$:

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Longleftrightarrow & y = 1 - \dfrac{1}{x} \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{x} = 1 - y \\ & \Longleftrightarrow & 1 = x(1-y) \\ & \Longleftrightarrow & x = \dfrac{1}{1-y}. \end{array}$$

D'où $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists x \in \mathbb{R}^*, x = \dfrac{1}{1-y} : y = f(x)$ et donc f est surjectif. **(1,5 pts)**

On en déduit que f est un morphisme bijectif (i.e., f est un isomorphisme). **(0,5 pts)**

II/ 1- Vérifier que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x * y = 1 - (1-x)(1-y)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} x * y &=& x + y - xy \\ &=& x + y(1-x) + 1 - 1 \\ &=& y(1-x) - (1-x) + 1 \\ &=& (1-x)(y-1) + 1 \\ &=& 1 - (1-x)(1-y). \end{array}$$

D'où $x * y = 1 - (1-x)(1-y)$. **(0,5 pts)**

2- Pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, évaluer la puissance n$^{\text{ème}}$:

$$\underbrace{x * \ldots * x}_{n \text{ fois}}.$$

Pour $n = 2$ on a : $x * x = 1 - (1-x)^2$.

Pour $n = 3$ on a :

$$\begin{array}{rcl} x * (x * x) &=& x * [1 - (1-x)^2] \\ &=& 1 - (1-x)\Big[1 - \big(1 - (1-x)^2\big)\Big] \\ &=& 1 - (1-x)(1-x)^2 \\ &=& 1 - (1-x)^3. \end{array}$$

Montrons par récurrence qu'on a :

$$\forall n \geq 2 : \quad \underbrace{x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = 1 - (1-x)^n. \qquad \textbf{(1 pts)}$$

On a déjà vérifié que cette dernière équation est vraie pour $n = 2$. Supposons qu'elle est vraie pour un entier $n \geq 2$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. **(0,5 pts)**

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{x * \ldots * x}_{(n+1) \text{ fois}} &=& x * \underbrace{(x * \ldots * x)}_{n \text{ fois}} \\ &=& x * [1 - (1-x)^n] \\ &=& 1 - (1-x)\Big[1 - \big(1 - (1-x)^n\big)\Big] \\ &=& 1 - (1-x)(1-x)^n \\ &=& 1 - (1-x)^{n+1}. \end{array}$$

D'où : $\forall n \geq 2 : \quad \underbrace{x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = 1 - (1-x)^n.$ **(1 pts)**

Exercice 2 : (6 pts)

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \mathcal{R} m \Longleftrightarrow n + m \text{ est pair}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(a) On a $\forall n \in \mathbb{Z} : n + n = 2n$, et $2n$ est pair, donc $\forall n \in \mathbb{Z} : n\mathcal{R}n$. D'où $\mathcal{R}$ est reflexive. **(0,5 pts)**

(b) Soient $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} n\mathcal{R}m &\Longrightarrow n + m \text{ est pair} \\ &\Longrightarrow m + n \text{ est pair} \\ &\Longrightarrow m\mathcal{R}n. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{R}$ est symétrique. **(0,5 pts)**

(c) Soient $n, m, r \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} n\mathcal{R}m &\Longleftrightarrow n + m \text{ est pair} \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} : n + m = 2\alpha \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z} : n = 2\alpha - m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\mathcal{R}r &\Longleftrightarrow m + r \text{ est pair} \\ &\Longleftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{Z} : m + r = 2\beta \\ &\Longleftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{Z} : r = 2\beta - m. \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned} n + r &= (2\alpha - m) + (2\beta - m) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 2m \\ &= 2(\alpha + \beta - m). \end{aligned}$$

comme $\alpha+\beta-m \in \mathbb{Z}$, alors $n+r$ est pair et donc $\Big((n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}r) \Longrightarrow n\mathcal{R}r\Big)$, c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est transitive. **(1,5 pts)**

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Calculer $cl(0)$ et $cl(1)$.

$$\begin{aligned} cl(0) &= \{n \in \mathbb{Z} : 0\mathcal{R}n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : 0 + n \text{ est pair}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ est pair}\} \\ &= 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

D'où $cl(0) = 2\mathbb{Z}$. **(1 pts)**

$$\begin{aligned} cl(1) &= \{n \in \mathbb{Z} : 1\mathcal{R}n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : 1 + n \text{ est pair}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ est impair}\} \\ &= 2\mathbb{Z} + 1. \end{aligned}$$

D'où $cl(1) = 2\mathbb{Z} + 1$. **(1 pts)**

3. Vérifier que $cl(0)$ et $cl(1)$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

(a) $cl(0) = 2\mathbb{Z} \neq \emptyset$ et $cl(1) = 2\mathbb{Z} + 1 \neq \emptyset$. **(0,5 pts)**

(b) $cl(0) \cap cl(1) = 2\mathbb{Z} \cap (2\mathbb{Z} + 1) = \emptyset$. **(0,5 pts)**

(c) $cl(0) \cup cl(1) = 2\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1) = \mathbb{Z}$. **(0,5 pts)**

Conclusion : $cl(0)$ et $cl(1)$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.