Exercice 1 : (6 pts)
Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ comme suit :

$$f(x) = 2x \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}.$$

1- Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
2- Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.
3- Que peut-on déduire ?

Solution :

1- f est injective, en effet soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(x_1) = f(x_1)$ i.e. $2x_1 = 2x_2$ alors $x_1 = x_2$. **(0.5pt)**

Etudions maintenant la surjectivité de f. Soit $y \in \mathbb{N}$, cherchons s'il existe un élément x de $\mathbb{N}$ tel que $y = f(x)$, i.e. $y = 2x$. On remarque qus si y est impair l'équation $y = 2x$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$, en d'autres termes tous les éléments impairs n'ont pas d'antécédent par f et donc f n'est pas surjective. **(1pt)**

Pour étudier la surjectivité de f, on peut dire aussi que pour tout élément x de $\mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ est un entier naturel pair, par conséquent les éléments impairs n'ont pas d'antécédent par f.

Pour la fonction g, elle n'est pas injective car il existe deux éléments distincts $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ de $\mathbb{N}$ tels que $g(0) = g(1) = 0$. **(0.5pt)**

Pour le surjectivité de g, on prend un élément quelconque $y \in \mathbb{N}$ et on cherche un élément x de $\mathbb{N}$ vérifiant $y = g(x)$. Si on considère $x = 2y$, on obtient $y = g(2y)$, et on en conclut que g est surjective. **(1pt)**

2- Pour préciser $f \circ g$ et $g \circ f$, on prend $x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x) = \frac{2x}{2} = x, \text{ i.e. : } g \circ f = Id_{\mathbb{N}}.\textbf{(1pt)} \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) = \begin{cases} 2.\dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 2.\dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}. \textbf{ (1pt)}
\end{aligned}$$

3- La composition de deux applications non bijectives peut être bijective. **(1pt)**

Exercice 2 : (5 pts)
Dans $\mathbb{Z}$, on considère la relation R définie par :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Longleftrightarrow x - y \text{ est multiple de 3.}$$

1- Vérifier que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2- Déteminer les classes de $0, 1$ et 2.
3- Préciser l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$ qu'on note par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
4- Vérifier que les éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ forment une partititon de $\mathbb{Z}$.

Solution :
1- R est réflexive, en effet pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$ est un multiple de 3, d'où xRx.
R est symétrique : soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{aligned} xRy &\Longleftrightarrow x - y \text{ est multiple de 3} \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = -3k = 3(-k), \ -k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow y - x \text{ est multiple de 3.} \end{aligned}$$

D'où yRx.
Enfin R est transitive : soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{aligned} (xRy \text{ et } yRz) &\Longleftrightarrow (x - y \text{ est multiple de 3 et } y - z \text{ est multiple de 3}) \\ &\Longleftrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \text{ et } y - z = 3k' \end{aligned}$$

On en déduit que : $(x - y) + (y - z) = x - z = 3k + 3k' = 3(k + k')$, $k + k' \in \mathbb{Z}$, i.e. xRz.
On en conclut que R est une relation d'équivalence. **(1.5pt)**
2- On a :

$$\begin{aligned} cl(0) &= \dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} : xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 0 \text{ multiple de 3}\} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ cl(1) &= \dot{1} = \{x \in \mathbb{Z} : xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 1 \text{ multiple de 3}\} = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \\ cl(2) &= \dot{2} = \{x \in \mathbb{Z} : xR2\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 2 \text{ multiple de 3}\} = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}. \ \textbf{(1.5pt)} \end{aligned}$$

3- On déduit de la question précédente que tout élément de $\mathbb{Z}$ appartient à l'un des ensembles $cl(0)$, $cl(1)$ et $cl(2)$, et donc :

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\right\}. \ \textbf{(1pt)}$$

4- On vérifie que :
a/ $\dot{0} \neq \varnothing, \dot{1} \neq \varnothing$ et $\dot{2} \neq \varnothing$ (Une classe d'équivalence n'est jamais vide).
b/ $\dot{0} \cap \dot{1} = \varnothing, \dot{0} \cap \dot{2} = \varnothing$ et $\dot{1} \cap \dot{2} = \varnothing$ (Deux classes d'équvalence différentes sont toujours disjointes),
c/ $\dot{0} \cup \dot{1} \cup \dot{2} = \mathbb{Z}$. **(1pt)**

Solution du Problème : (9 pts) (Les questions sont indépendantes)

1/ Soient P, R et T trois propositions logiques. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$[\ (P \vee R) \Rightarrow T\ ] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow T) \wedge (R \Rightarrow T)]\,.$$

Solution : On peut utiliser la table de vérité ou la définition de l'implication. **(1pt)**

2/ Soient E un ensemble et A, B , C et D des sous-ensembles de E. Montrer que :

$$[(A \cap B = C \cap D) \wedge (C \cup D = E) \wedge (C \subset A) \wedge (D \subset B)] \Rightarrow [(C = A\ )\ \ \wedge (D = B)]\,.$$

Solution : Supposons que : $(A \cap B = C \cap D) \wedge (C \cup D = E) \wedge (C \subset A) \wedge (D \subset B)$.

Montrons que : $(C = A\ ) \ \wedge (D = B)$. En utilisant la définition de l'égalité de deux ensembles et l'hypothèse, il suffira de montrer $(A \subset C) \wedge (B \subset D)$.

On commence par montrer$A \subset C$. On a :

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in C \cup D \text{ (on utilise les hypothèses } A \subset E \text{ et } C \cup D = E) \\ &\Longrightarrow x \in C \text{ ou } x \in D \text{ (On utilise la définition de la réunion).} \end{aligned}$$

Si $x \in C$, alors $A \subset C$.

Si $x \in D$, alors $x \in B$ car $D \subset B$, d'où $x \in A \cap B$. Puisque $A \cap B = C \cap D$, alors $x \in C$, i.e. $A \subset C$.

On utilisera le même raisonnement pour montrer que $B \subset D$. **(2pts)**

3/ Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, A_1, ..., A_n$ des parties de E telles que :

$$A_0 = \varnothing \text{ et } A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq ... \subsetneq A_n = E.$$

(la notation $A_i \subsetneq A_{i+1}$ signifie $A_i \subset A_{i+1}$ et $A_i \neq A_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$)

Soient $B_1, ..., B_n$ des parties de E définies comme suit :

$$B_1 = A_1 \setminus A_0, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad ... \quad , \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Montrer que $\{B_i, 1 \leq i \leq n\}$ forme une partition de E.

Solution : On a pour tout $i \in [[1, n]]$:

a/ $B_i \neq \varnothing$, par hypothèse $A_i \subsetneq A_{i+1}$.

b/ Pour tous $i, j \in [[1, n]]$, on a $B_i \cap B_j = \varnothing$, sinon s'il existerait $x \in B_i \cap B_j$ i.e. :

$$(x \in A_i \text{ et } x \notin A_{i-1}) \text{ et } (x \in A_j \text{ et } x \notin A_{j-1})$$

Si on suppose que $i < j$, on aura $A_i \subset A_{j-1}$ et dans ca cas la relation $x \in A_i$ et $x \notin A_{j-1}$ est absurde. Il en est de même si on suppose que $j < i$.

c/ $\displaystyle\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i = E$, en effet soit $x \in E$ alors il existe $i \in [[1, n]]$ tel que $x \in A_i$ et $x \notin A_{i-1}$ i.e. $x \in B_i$. **(2pts)**

4/ Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

$$[\forall A_1, A_2 \in P(E) : f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)] \Rightarrow f \text{ injective.}$$

Solution : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_1)$ et $x_1 \neq x_2$. Si on pose : $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$, on aura, par hypothèse :

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\})$$

On en déduit : $f(\varnothing) = f(\{x_1\})$, i.e. $\varnothing = \{f(x_1)\}$ ce qui est impossible, d'où f est injective. **(2pts)**

5/ Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ trois applications telles que :

$$h \circ g \circ f \text{ surjective, } g \circ f \circ h \text{ injective et } f \circ h \circ g \text{ injective.}$$

Montrer que f, g et h sont des bijections.

(On rappelle que si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, alors

$$(g \circ f \textit{ injective} \Rightarrow f \textit{ injective}) \text{ et } (g \circ f \textit{ surjective} \Rightarrow g \textit{ surjective}).)$$

Solution : On a : $(h \circ g \circ f \textit{ surjective} \Rightarrow h \textit{ surjective})$ et $(g \circ f \circ h \textit{ injective} \Rightarrow h \textit{ injective})$, i.e. h est bijective. Comme la composition de deux applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est injective (resp. surjective, bijective), alors :

$$h^{-1} \circ (h \circ g \circ f\ ) = g \circ f \text{ est surjective et } (g \circ f \circ h) \circ h^{-1} = g \circ f \text{ est injective,}$$

ce qui entraine f injective et g surjective. Comme $f \circ h \circ g$ est injective, donc g est injective i.e. g et bijective. Donc :

$$g^{-1} \circ (g \circ f\ ) = f \text{ surjective,}$$

ainsi f est bijective CQFD. **(2pts)**