بنك الجزائر

ECOLE SUPERIEURE DE BANQUE

المدرسـة العليـا للمصرفـة

Concours d'accès à l'Ecole Supérieure de Banque

مسابقة الدخول للمدرسة العليا للمصرفة

Diplôme Supérieur des Etudes Bancaires

الشهادة العليا للدراسات المصرفية

Session 2010 دورة

***Matière* : Mathématique** ***Durée* :3h**

***مادّة* : الرياضيات المدّة :3 سا**

التمرين الأول : 3ن

ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2+iy_2$ من $\mathbb{C}$. نضع : $z = x_1x_2+i(2x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1)$.

لتكن المجموعة : $H = \{z,\ z\epsilon\mathbb{C} : z = e^t + i(e^t + e^{-t}), t \in \mathbb{R}_+^*\}$.

نضع : $H' = \left\{z,\ z\epsilon\mathbb{C} :\ z = x + i\left(x + \frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

1. أثبت ما يلي : $z_1 \in H\ , z_2 \in H \Rightarrow z \in H$.
2. نفس السؤال بالنسبة للمجموعة H'.

التمرين الثاني : 4ن

المستوي التألفي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. نعتبر النقط A و B و C التي لواحقها على التوالي z_A , z_B , z_C حيث :

$z_A = a \in \mathbb{R}_+^*$ و $z_B = bj$ و $z_C = cj^2$, مع $b \in \mathbb{R}_+^*$ و $c \in \mathbb{R}_+^*$.

j هو العدد المركب الذي طويلته 1 وعمدته $\frac{2\pi}{3}$.

1. أحسب $1 + j + j^2$ و j^3. برّر إجابتك .
2. أثبت أنّ : $\forall z \in \mathbb{C}\ , (z_A - z) + (z_B - z)j^2 + (z_C - z)j\ = a + b + c$.
3. استنتج أنّ : $a + b + c \le |z_A - z| + |z_B - z| + |z_C - z|$, و هذا مهما يكن العدد المركب z .
4. حدّد عندئذٍ أصغر قيمة للعدد الحقيقي الموجب $|z_A - z| + |z_B - z| + |z_C - z|$ لمّا يتغير العدد المركب z في $\mathbb{C}$.

التمرين الثالث : 4ن

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. أثبت أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{u_k^2})$.
2. استنتج أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2n + 25} < u_n < \sqrt{2n + 25 + \frac{1}{5}(u_n - 5)}$.
3. بيّن أنّ الحدّ u_{1000} ينتمي إلى المجال $]45\ , 45.1[$.

التمرين الرابع : 5ن

لتكن الدّالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرّفة بـ : $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{1-e^{|x|}}\right)$.

1. عيّن مجموعة تعريف الدّالة f ولتكن D_f.
2. ما هي إشارة $f(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي x من D_f ؟
3. احسب مشتق الدّالة f ثمّ أنشئ جدول التغيرات.
4. عيّن الفروع اللانهائية لمنحنى الدّالة.
5. أثبت أنّ اقتصار الدالة للمجال $]0, +\infty[$ يشكل تقابلاً نحو مجالٍ يطلب تعيينه.

التمرين الخامس : 4ن

نعتبر دالتين f و g معرّفتين على المجال $[0,1]$ ومستمرتين عليه. نفرض أنّ قيم الدّالتين تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تمامًا. من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n = \int_0^1 f(x^n)g(x)\,dx$.

1. أثبت أنّه إذا كانت الدّالة f متزايدة تمامًا فإنّ المتتالية العددية $(I_n)_n$ متناقصة تمامًا وأنّها متقاربة.
2. نختار : $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   - استنتج أنّ المتتالية العددية $(I_n)_n$ متقاربة.
   - أحسب : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.