Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques D'Oran
2eme année
Examen Final, Analyse Numérique 02
02/06/2012 (*La durée* : 02^h : 00)

Documents ; Téléphone ; non autorisés
N.B : a chaque utilisation d'un théorème ou d'autre résultat du cours, rappeler soigneusement (et vérifier) les hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer, faute de quoi la conclusion n'a pas de valeur.
Exercice 1 :(4 pts) (Interpolation de Newton)
Calculer les coefficients c_k du polynôme d'interpolation P_3, qui interpole la fonction f définie par:

$$f(0) = \frac{1}{2}, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = -\frac{1}{2}.$$

Dans la base de Newton, et ecrire $P_3(x)$.
N.B: Le calcul doit être indiqué clairement et en détail.
Exercice 2 :(6 pts) (Erreur d'interpolation)
On considère une fonction

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

Soit p le polynome de degré un qui interpole f pour le support $\{x_0, x_1\}$.
1. Étudier la fonction

$$x \mapsto (x-1)(x+1) \text{ pour } x \in [-1, 1].$$

2. Meme question pour la fonction

$$x \mapsto \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Pour réaliser une interpolation numérique d'une fonction

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

quels points de support $\{x_0, x_1\}$ doit on choisir $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$? pourquoi?
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 de

$$x \mapsto x^3$$

qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1, 1]$.
5. En utilisant votre calculatrice, dites parmis les support suivants, lequel vous choisiriez pour une interpolation à trois points:

$$\text{a) } \{-1, 0, 1\}, \text{ b) } \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \text{ c) } \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Vous expliquerez en quoi la calculatrice vous aide à prendre votre décision.
Exercice 3:(4 pts) (Erreur d'intégrale).
Trouver le nombre N de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à 0.5×10^{-3} près, grace à Simpson, l'intégrale:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx.$$

Exercice 4:(6 pts)
On définit la fonction
$$g(x) = \frac{1}{1-x}.$$
Calculer
$$F(x) = \int_0^x g(t)dt, x < 1.$$
1. Quelle est la valeur de $F(x)$ en $x = \frac{2}{3}$?
2. Donner le degré et l'expression du polynome de Lagrange qui interpole la fonction g aux points 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.
3. Trouver des coefficients c_0, c_1 et c_2 tels que pour tout polynome p de degré inferieur ou égal à 2, on ait
$$\int_0^2 P(x)dx = c_0P(0) + c_1P(1) + c_2P(2).$$
En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précedent les coéfficients d_0, d_1 et d_2 tels que pour tout polynome q de degré inférieur ou égal à 2, on ait
$$\int_0^2 q(x)dx = d_0q(0) + d_1q(\frac{1}{3}) + d_2q(\frac{2}{3}).$$
Utilser cette formule pour donner une valeur approchée de $\ln 3$.

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Kh. ZENNIR et S. BENAMMAR
BON COURAGE

Correction Examen Final, Analyse Numérique 02

Exercice 1 :(4 pts)
Pour calculer les coefficients de $p_3(t)$ dans la base de *Newton*, nous sommes conduits à construire le tableau pour $n = 3$, ce qui avec les données de l'exercice nous donne : **3 pts**

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$t_0 = 0$	$f(t_0) = 1/2$			
$t_1 = 1$	$f(t_1) = 1$	$f(t_0, t_1) = 1/2$		
$t_2 = 2$	$f(t_2) = 2$	$f(t_1, t_2) = 1$	$f(t_0, t_1, t_2) = 1/4$	
$t_3 = 3$	$f(t_3) = -1/2$	$f(t_2, t_3) = -5/2$	$f(t_1, t_2, t_3) = -7/4$	$f(t_0, t_1, t_2, t_3) = -2/3$

On peut donc écrire $p_3(t)$ de la façon suivante : **1 pts**

$$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2)$$

Exercice 2 :(6 pts)
1. On étudie la fonction $f(x) = (x-1)(x+1)$ sur $[-1, 1]$, traçons le graph. **1 pts**
2. On étudie la fonction $f(x) = (x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)$ sur $[-1, 1]$, traçons le graph. **1 pts**
3. On choisit le support $\left\{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right\}$. En effet si P est le polynôme d'interpolation d'une fonction f pour un support à deux points $\{x_0, x_1\}$ l'erreur commise en remplaçant la valeur $f(x)$ par $p(x)$ est donnée en fonction de ς (qui dépend de x) par l'expression suivante: **1 pts**

$$e(x) = \frac{f^{(2)}(\varsigma)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Ainsi pour controler l'erreur on peut chercher à majorer $f^{(2)}$ sur $[-1, 1]$ et $(x - x_0)(x - x_1)$ sur $[-1, 1]$. Or les questions 1 et 2, montrent que **0.5 pts**

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1)| = \frac{1}{2}$$

losque $\{x_0, x_1\} = \left\{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right\}$ et **0.5 pts**

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1)| = 1$$

losque $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$. On minimisera donc l'erreur en prenant le support $\left\{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right\}$.
4. $P(x) = \frac{1}{2}x$, la formule de l'erreur donne **1 pts**

$$e(x) = \frac{6\varsigma}{2}\left(x - \sqrt{2}/2\right)\left(x + \sqrt{2}/2\right), \varsigma \in [-1, 1].$$

En majorant $\varsigma \leq 0$ et $\left|\left(x - \sqrt{2}/2\right)\left(x + \sqrt{2}/2\right)\right| \leq \frac{1}{2}$, on obtient $|e(x)| \leq \frac{3}{2}$.
5. Il faut choisir $\left\{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\right\}$. En effet en traçant les courbes $y_1 = x(x-1)(x+1)$, $y_2 = x(x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2), y_3 = x(x - \sqrt{3}/2)(x + \sqrt{3}/2)$ on s'apperçoit que **1 pts**

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|x(x - \sqrt{3}/2)(x + \sqrt{3}/2)\right| < \sup_{x\in[-1,1]} \left|x(x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)\right| < \sup_{x\in[-1,1]} |x(x-1)(x+1)|$$

Exercice: (4 pts)
Soit

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx.$$

Le pas d'intégration est $h = \frac{(b-a)}{N} = \frac{2\pi}{N}$ $\boxed{\textbf{1 pts}}$. D'autre part l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par

$$\begin{aligned} E(h) &= \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\zeta) \ \boxed{\textbf{1 pts}} \\ &= \frac{-2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^4 \cos(\zeta), \zeta \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

par conséquent,

$$|E(h)| = \left| \frac{-2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^4 \right|$$

Ainsi pour que $|E(h)| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ il suffit que N vérifie

$$\left| \frac{-2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^4 \right| \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

Donc, $\boxed{\textbf{1 pts}}$

$$N^4 \geq \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} \frac{\pi}{90} 16\pi^4.$$

Ainsi N vérifie $N \geq 18.6$. On prendra $N = 22$, car pour Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ doit toujours être pair. $\boxed{\textbf{1 pts}}$

Exercice 4 (6pts)

Soit

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

1. Calculons

$$\begin{aligned} F(x) &= -\ln(1-x). \boxed{\textbf{0.5 pts}} \\ F(\frac{2}{3}) &= \ln 3. \boxed{\textbf{0.5pts}} \end{aligned}$$

2. Le polynome de Lagrange passant par 3 points est de degré 2.

$$P_2(x) = \frac{9}{2}x^2 + 1. \boxed{\textbf{1 pts}}$$

3. On pose $P(x) = 1$, $P(x) = x$, $P(x) = x^2$. On trouve le système

$$\begin{aligned} \int_0^2 1dx &= 2 = c_0 + c_1 + c_2 \\ \int_0^2 xdx &= 2 = c_1 + 2c_2 \\ \int_0^2 x^2dx &= \frac{8}{3} = c_1 + 4c_2. \end{aligned}$$

Ce qui donne $c_0 = c_2 = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{4}{3}$. $\boxed{\textbf{2 pts}}$ On peut ensuite effectuer le changement de variable $x = 3y$. On a

$$\int_0^2 P(x)dx = 3\int_0^{\frac{2}{3}} q(y)dy.$$

qui donne $d_i = \frac{1}{3}c_i$. On trouve $d_0 = d_2 = \frac{1}{9}, d_1 = \frac{4}{9}$, $\boxed{\textbf{1 pts}}$ et donc l'approximation

$$\ln 3 = \frac{10}{9}. \boxed{\textbf{1 pts}}$$

.