Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran 2011/2012

2ème année **Examen n°1 de probabilité** durée: 2h30

Exercice1:

Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau qui suit:

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$
1	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$

où p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et distinct de $\frac{1}{2}$. On pose $Z = X.Y$.

1. Calculer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique.
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y. Est ce que X et Y sont indépendantes?

Exercice2:

Soit X et Y deux variables aléatoires. On connait $P(X = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{2}{3}$,

$P(Y = 2\backslash\ X = 1) = \frac{3}{4}$, $P(Y = -3\backslash\ X = 1) = \frac{1}{4}$,

$P(Y = 2\backslash\ X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(Y = -3\backslash\ X = 0) = \frac{3}{4}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y. Calculer $E(3X + 2Y)$.
2. Calculer $E(2X^2 - Y^2)$.
3. Calculer $E(X.Y)$. Déduire $cov(X,\ Y)$.

Exercice3:

Soit un couple de variables aléatoires à valeurs réelles de densité de probabilité conjointe:

$$f_{X,\ Y}(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)) \text{ ,si } -1 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \text{ ,} \quad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition F.

3. Calculer $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq Y \leq 1)$.

4. Calculer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

5. Calculer la covariance et le coéficient de corrélation.

6. Donner la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice4:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de probabilité dont la densité est défnie par:

$$f(t) = \frac{1}{t^2}, \quad t \geq 1.$$

On pose:

$$\begin{cases} U = X.Y \\ V = \dfrac{X}{Y} \end{cases}$$

Quelle est la loi de probabilité du couple (U, V) ?