الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
المدرسة التحضيرية في العلوم و التقنيات بوهران
Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

2ème Année : Semestre 2 *Mécanique des Fluides*

Devoir Surveillé (D.S)

Exercice n°1 : ***Ecoulement potentiel d'une source rectiligne à symétrie cylindrique***

Une source « rectiligne » de longueur infinie, dirigée suivant l'axe vertical Oz, émet un fluide de façon isotrope dans l'espace.

Le champ des vitesses d'écoulement, en tout point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $\{\overrightarrow{u_r}\ ;\ \overrightarrow{u_\theta}\ ;\ \overrightarrow{u_z}\}$ est radial : $\vec{v} = \frac{k}{r}\overrightarrow{u_r}$

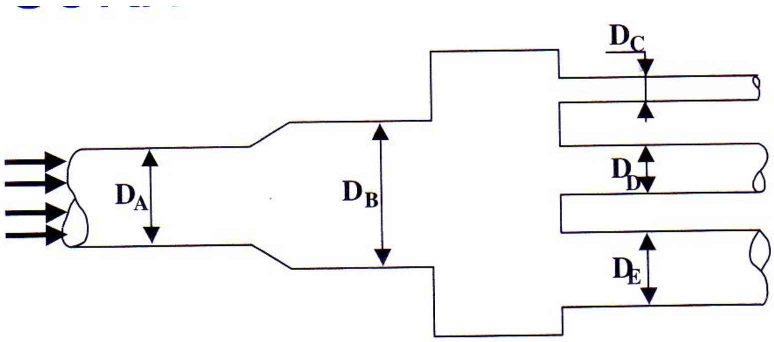
Où k est une constante positive, fonction du débit volumique de la source.

1) Montrer que cet écoulement est incompressible et irrotationnel.
2) Calculer le potentiel φ (r) des vitesses. Tracer l'allure des lignes de courant et des surfaces équipotentielles

Exercice n°2:

Un liquide s'écoule dans une tuyauterie comprenant différentes sections. Il arrive par une conduite A (diamètre D_A=40 mm et le débit Q_{VA}=50 $L.min^{-1}$) qui s'élargit en une conduite B (D_B=60 mm) puis passe dans un embranchement de trois (3) conduites C, D, et E (D_C=10 mm, D_D=20 mm et D_E=30 mm).

Déterminer le débit et la vitesse du fluide dans chacun des quatre (4) tuyaux B, C, D, et E : Q_{VB} ?, Q_{VC} ?, Q_{VD} ?, Q_{VE} ? , v_B ?, v_C ?, v_D ?, et v_E ?



Exercice n°3:

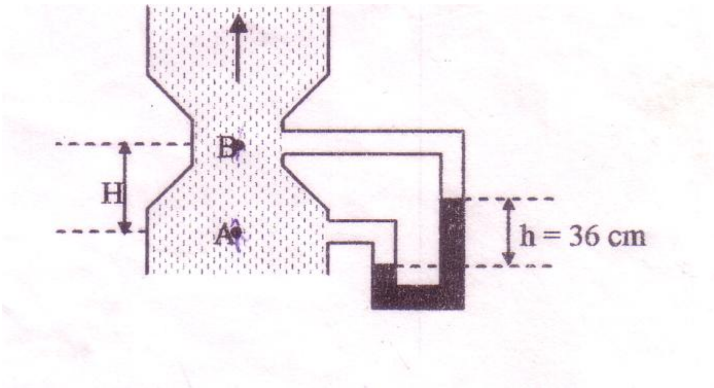
Dans un tube de Venturi représenté ci -dessous. L'eau s'écoule de bas en haut.

La dénivellation du mercure du manomètre différentiel est h = 36 cm. Le diamètre du tube en A est 30 cm, et en B il est de 15 cm.

1°) Calculer la vitesse en B et le débit de l'eau considérée comme un fluide parfait.

2°) Que se passe - t-il si on inverse le sens de l'écoulement de l'eau

On donne: $\rho_{eau} = 1 g.cm^{-3}$; $\rho_{Hg} = 13{,}6\ g.cm^{-3}$ $g = 10\ m.s^{-2}$

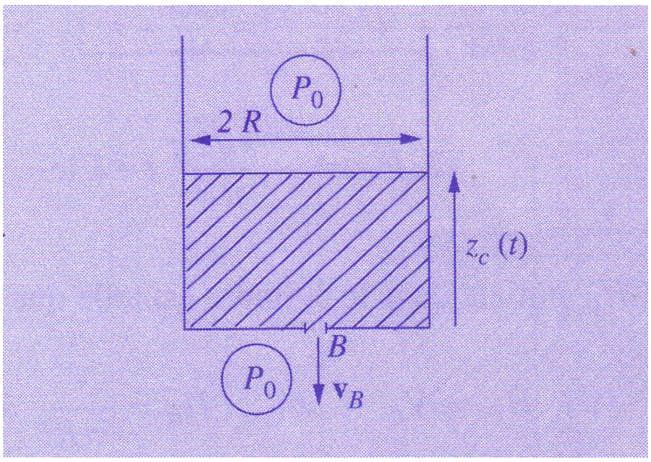


Exercice n°4 :

Un volume d'eau V_0=80 litres est versé dans un récipient cylindrique de rayon R = 20cm, la pression atmosphérique P_0 règne au dessus de l'eau.

On ouvre à l'instant t=0, un petit orifice B circulaire de section s=15 mm^2 au fond du réservoir cylindrique. On donne g=9,8 $m.s^{-2}$.

1) Ecrire la loi d'évolution $z_C(t)$, où z_C est la hauteur d'eau dans le réservoir, comptée à partir de B, à l'instant t.
2) Exprimer littéralement la durée T_C de vidange, puis la durée t_C nécessaire pour vider la moitié du récipient cylindrique.
3) Calculer numériquement T_C et t_C.



Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

Avril 2012

Devoir Surveillé 2 (MDF)

Exercices 01:

1) Le champ de vitesse est radial $\overrightarrow{v}=\left(\frac{k}{r}\right)\vec{u}_r$ $\quad(\overrightarrow{v}=v_r\,\vec{u}_r)$ avec $v_r=\frac{k}{r}$

$$div\,\overrightarrow{v}=\frac{1}{r}\frac{\delta(rv_r)}{\delta_r}=\frac{1}{r}\frac{\delta(r\frac{k}{r})}{\delta_r}=\frac{1}{r}\frac{\delta(k)}{\delta_r}=0 \qquad (rv_r=k=constante)$$

Le fluide est donc en écoulement incompressible car $div\overrightarrow{v}=0$

Le champ de vitesse est radial et indépendant de θ et z

Donc $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}=\frac{\delta v_r}{\delta z}\overrightarrow{u_\theta}-\frac{1}{r}\frac{\delta v_r}{\delta\theta}\overrightarrow{u_z}=\vec{o}$

Le fluide est donc animé d'un mouvement irrotationnel car $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}=\vec{o}$

2) Au champ de vitesse $\overrightarrow{v}=\left(\frac{k}{r}\right)\vec{u}_r$ ou associe le potentiel car $\varphi(r)$ défini par :

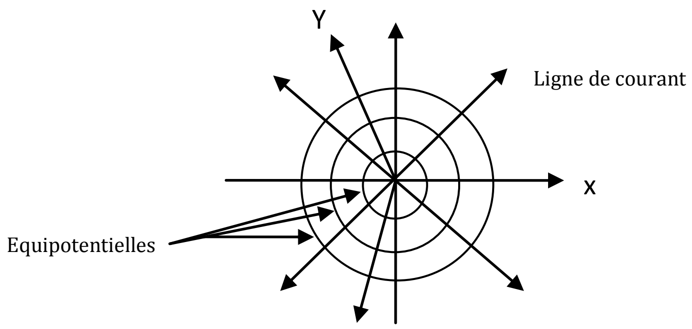
$\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{grad}\,\varphi$ Car $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}=\vec{o}$ donc

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} v_r & = & \frac{k}{r}= & -\frac{\delta\varphi}{\delta_r} \\ v_o & = & 0= & -\frac{\delta\varphi}{r\delta\varphi} \\ v_z & = & 0= & -\frac{\delta\varphi}{\delta_z}\end{pmatrix}$$

Le potentiel φ est donc indépendant de θ et z soit : $\frac{k}{r}=-\frac{d\varphi}{dr}\rightarrow d\varphi=-\frac{kdr}{r}$

$\varphi(r)=-k\,Lnr+constante$

- Les surfaces équipotentielles définies par $\varphi=constante\ ou\ r=constante$ sont donc des cylindres d'axe Oz : leur trace dans le plan z= 0 sont des cercles concentriques
- Les lignes de courant définis par $\overrightarrow{v}//\overrightarrow{d_r}$: sont donc des droits radiales issus de 0



<u>Exercices 02</u> : l'équation de continuité permet:

$$Q_{V_A}=V_AS_A=Q_{V_B}=V_BV_B$$

$Q_{V_B}=50$ l/min $\quad v_B=\left.Q_{V_B}\middle/S_B\right.$=0.29 m/S

On a : $Q_{VB} = Q_{VC} + Q_{VD} + Q_{VE} = v_C S_C + v_D S_D + v_E S_E$

Donc : $v_B s_B = v_C s_C + v_D s_D + v_E s_E$ puisque s_C, s_D , s_E sont différents alors :

$v_C = v_D = v_E = v$ (Obligatoirement)

$v_C = v_D = v_E = v \Longrightarrow Q_{VB} = v(s_C + s_D + s_E) \Longrightarrow v = \frac{Q_{VB}}{s_C + s_D + s_E}$

$\Longrightarrow v_C = v_D = v_E = 0.76\text{m/s}$

$Q_{VC} = s_C v_C = 3.57$ l/min, $Q_{VD} = s_D v_D = 14.25$ l/min

$Q_{VE} = s_E v_E = 32.14$ l/min

Ou vérifie que :

$Q_{VB} = 50$ l/min $= Q_{VC} + Q_{VD} + Q_{VE} = 3.57$ l/min $+ 14.29$ l/min $+ 32.14$ l/min $= 50$ l/min

Exercices 03 :

$$P_A + {}^1/_2\ \rho_{eau} v_A^2 = P_B + {}^1/_2\ \rho_{eau} v_B^2 + \rho_{eau}\, gH$$

$$\Longrightarrow P_A - P_B = \rho_{eau}\, gH + {}^1/_2\ \rho_{eau}(v_B^2 - v_A^2)$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} P_c = P_A + \rho_{eau}\ g(z_A - z_C) \\ P_D = P_B + \rho_{eau}\ g(z_B - z_D) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow P_c - P_D = P_A - P_B + \rho_{eau}\ g[(z_A - z_C) - (z_B - z_D)]$$

$$= P_A - P_B + \rho_{eau}\ g[(z_A - z_B) + (z_D - z_C)]$$

$$= (P_A - P_B) + \rho_{eau}\ g(-H + h)$$

On a : $P_c - P_D = \rho_{Hg}\ gh$

$$\Longrightarrow \rho_{eau}\ gH + \frac{1}{2}\rho_{eau}(v_B^2 - v_A^2) + \rho_{eau}\ g(-H + h) = \rho_{Hg}\ gh$$

$$\Longrightarrow \rho_{eau}\ gH + \frac{1}{2}\rho_{eau}(v_B^2 - v_A^2) - \rho_{eau}\ gH + \rho_{eau}\ gh = \rho_{Hg}\ gh$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\rho_{eau}(v_B^2 - v_A^2) = gh(\rho_{Hg} - \rho_{eau}) \Longrightarrow v_B^2 - v_A^2 = \frac{2gH(\rho_{Hg} - \rho_{eau})}{\rho_{eau}}$$

$$\Longrightarrow v_B^2\left(1 - \frac{v_A^2}{v_B^2}\right) = \frac{2gH(\rho_{Hg} - \rho_{eau})}{\rho_{eau}}$$

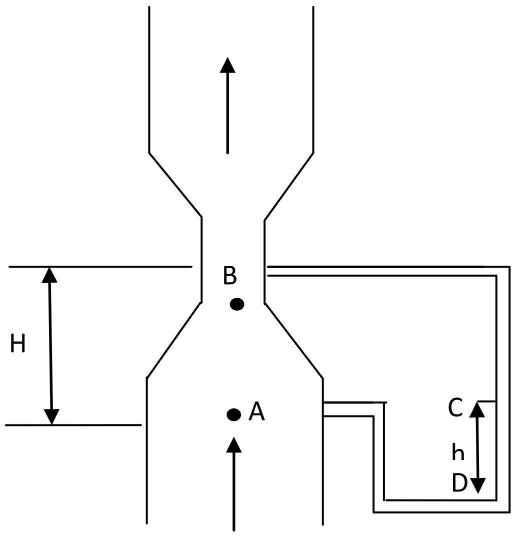
On a $Q_V = S_A v_A = S_B v_B \Longrightarrow v_A = \frac{S_B v_B}{S_A} \Longrightarrow \frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{S_B^2}{S_A^2}$

$\Longrightarrow$ Donc : $v_B^2\left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right) = \frac{2gH(\rho_{Hg} - \rho_{eau})}{\rho_{eau}}$

$$\Longrightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2gH(\rho_{Hg} - \rho_{eau})}{\rho_{eau}\left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right)}} \Longrightarrow \quad v_B = 9.84 \text{ m/s}$$

$$Q = S_B v_B = \pi \left(\frac{d_B}{2}\right)^2 . v_B = 0.174 \frac{m^3}{s}$$

2) Si on inverse le sens de l'écoulement rien n'est changé pour un fluide parfait



Exercices 04:

1) Le Théorème de Bermoulli s'écrit entre la surface libre de l'eau A et B

$$P_0 + \rho g z_c + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) = \rho g z_c$$

$$v_A \ll v_B \quad car\ \Delta \ll S \Longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho g z_c \Longrightarrow v_B = \sqrt{2gz_c}$$

La conservation du débit volumique en régime permanent de vidange :

$$\Delta v_B = -\pi R^2 \frac{dz_c}{dt} \Longrightarrow \Delta\sqrt{2gz_c} = -\pi R^2 \frac{dz_c}{dt}$$

On sépare les variables $\frac{dz_c}{\sqrt{z_c}} = -\frac{\Delta\sqrt{2g}}{\pi R^2} dt$

Après intégrations $2\sqrt{z_c} = -\Delta \frac{\sqrt{2g}}{\pi R^2} t + constante$

La hauteur d'eau H_0 initiale dans le cylindre est : $\pi R^2 H_0 = V_0 \Longrightarrow H_0 = \frac{V_0}{\pi R^2} = z_c$ à

à t=0 $\quad 2\sqrt{\frac{V_0}{\pi R^2}}$ = constante $\Longrightarrow 2\sqrt{z_c} = -\frac{\Delta\sqrt{2g}}{\pi R^2} t + \frac{2}{R}\sqrt{\frac{V_0}{\pi}}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{z_c} = \frac{-s}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{g}}{\pi R^2} t + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{V_0}{\pi}} \Longrightarrow z_c(t) = \left(\sqrt{\frac{V_0}{\pi R^2}} - \frac{\Delta\sqrt{2g}}{2\pi R^2} t\right)^2$$

2) La durée $T_c$de id ange est telle que $z_c(T) = 0$

$$0 = \sqrt{\frac{V_0}{\pi R^2}} - \frac{s\sqrt{2g}\, T_c}{2\pi R^2} \Longrightarrow \frac{s\sqrt{2g}}{2\pi R^2} T_c = \sqrt{\frac{V_0}{\pi R^2}} \Longrightarrow T_c = \frac{2\pi R^2}{s\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{V_0}{\pi R^2}}$$

A.N $T_c = 3020s = 50 \min\ 20s$

La durée t_c de demi vidangue $z_c(t_c) = \frac{H_0}{2} = \left(\sqrt{H_0} - \frac{s\sqrt{2g}}{2\pi R^2} t_c\right)^2$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{H_0}}{\sqrt{H_0}} - \frac{s\sqrt{2g}\ t_c}{2\pi R^2\sqrt{H_0}}\right)^2 = \left(1 - \frac{t_c}{T_c}\right)^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t_c}{T_c} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{t_c}{t_c} \Longrightarrow \frac{t_c}{T_c} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow t_c = T_c(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$t_c = 0.293\ T_c = 885\ s = 14\,\text{min}\,45s$