الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole préparatoire en sciences et techniques d'Oran.

2ème Année	**Devoir n° 02**1 H:30

Exercice 1:$(05pts)(Questions\ de\ cours)$

1- Supposons qu'il existe un $x_0 \in$ D $(domaine\ \ de\ convergence)$tel que la suite$a_n x_0^n$ soit bornée.

Montrer que $\forall x \ \in D$; $|x| < |x_0|$ la $\sum_n a_n x^n$ converge absolument.

2- $(Vrai\ ou\ faux)$ Soient $a_n\ et\ b_n$les coefficients de Fourier, c_n les coefficientsde Fourier complexes.

$$\text{Si} \sum_n a_n\ \ et\ \sum_n b_n \text{ sont existés,} \qquad \text{alors} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\omega t} \text{ converge.}$$

3- On appelle la transformation de Fourier de f , la fonction $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$\mathcal{F}(f\ )\ (\alpha)\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\,2\pi\alpha t}\ dt$$

Montrer que si $f, g\ \in\ L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\ .\ \mathcal{F}(g)$.

Exercice 2:$(04pts)$

1) Développer en série entière la fonction:$f(x) = \cos x$ ch x.

2) Déterminer le domaine de convergence de la série entière:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = f(x).$$

Exercice 3: $(06pts)$

Soit α un nombre réel non entier et soient f et g deux fonctions de période 2π définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(t) = \sin \alpha t$et $g(t) = \cos \alpha t$pour $|t| \leq\ \pi$.

1) Déterminer les séries de Fourier de f et de g.
2) Les séries de Fourier de $f$et de $g$sont-elleconverges ?
3) La fonction$f$ est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
4) Mêmequestion pour la fonction g.
5) A partir des séries de Fourier de$f$ et de g, expliciter la série de Fourier (complexe) de la fonction h de période 2π, définie sur $\mathbb{R}$, égale à $e^{i\alpha t}$ pour $|t| \leq\ \pi$.
6) En déduire la somme

$$\sum_{n>0} \frac{1}{\alpha^2\ - n^2}.$$

Exercice 4: $(05pts)$ Soit$\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) =\ e^{\alpha|x|}$.

1) Pour quelles valeurs de α la transformée de Fourier de$f$ existe ?
2)Calculer la transformée de Fourier de f.
3) Déduire la transformée de Laplace de$x \to e^{\alpha|x|}$.
4) Calculer $f * f$; calculer la transformée de Fourier et la transformée de Laplace de $f * f$.
5) Résoudre l'équation (1) par Laplace et Fourier:

$$y''(x) +\ \ y'(x) -\ y(x) = f(x);\ y(0) =\ y'\ (0) = 0;\ \ x \geq 0 \quad (1)$$

BONNE CHANCE

Un corrigée de devoir (avec quelques rappels de cours)

Exercice 1: $(05pts)$

1- La suite $a_n x_0^n$ est bornée alors $\exists M > 0; \forall n \in N;\ |a_n x_0^n| \leq M.$ $(0{,}5pt)$

On a:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \ (0{,}5pt)$$

Or la série géométrique$\sum_n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$converge car $(|x| < |x_0|)$ d'après le théorème de comparaison la série$\sum_n |a_n x^n|$ converge. C'est-à-dire $\sum_n a_n x^n$ converge absolument.$(0{,}5pt)$

2- Faux $(0{,}5pt)$

la réponse :

Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier, c_n les coefficients de Fourier complexes.

$$\text{Si} \sum_n |a_n| \ et \sum_n |b_n| \text{ sont existés,} \quad \text{alors} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\omega t} \text{ converge. } (1pt)$$

3- On appelle la transformation de Fourier de f, la fonction $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\,2\pi\alpha t}\, dt$$

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(f * g)(t)]e^{-i\,2\pi\alpha t}\, dt$$

On définit le produit de convolution par :

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u).g(t-u)\, du. \ (0{,}5pt)$$

On obtient :

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u).g(t-u)\, du\right] e^{-i\,2\pi\alpha t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u).\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u).e^{-i\,2\pi\alpha t}\, dt\right] du \ (0{,}5pt)$$

Soit $t - u = v \Rightarrow dv = dt\ (0{,}5pt)$

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u).\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u).e^{-i\,2\pi\alpha\,(u+v)}\, dv\right] du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u).e^{-i\,2\pi\alpha.u} du \times \int_{-\infty}^{+\infty} g(v).e^{-i\,2\pi\alpha.v}\, dv$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(g)}.(0{,}5pt)$$

Exercice 2: $(04pts)$

1) On a : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, c'est à dire

$$\cos x \operatorname{ch} x = \frac{1}{4}e^{t(i+1)} + \frac{1}{4}e^{t(i-1)} + \frac{1}{4}e^{t(-i+1)} + \frac{1}{4}e^{t(-i-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left((i+1)^k + (i-1)^k(-i+1)^k(-i-1)^k\right)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^k+\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^k+\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^k+\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^k\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^k\left(2\cos\frac{k\pi}{4}+2\cos\frac{k3\pi}{4}\right)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^k\left(\cos\frac{k\pi}{4}+\cos\frac{k3\pi}{4}\right)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^k\left(\frac{\cos\left(\frac{k3\pi}{4}+\frac{k\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{k3\pi}{4}-\frac{k\pi}{4}\right)}{2}\right)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^k\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\ \cos(k\pi)\right)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2}^0(\cos(0)\ \cos(0))\frac{x^0}{0!}+\frac{1}{4}\sqrt{2}^1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\ \cos(\pi)\right)\frac{x^1}{1!}$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{2}^2(\cos(\pi)\ \cos(2\pi))\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\sqrt{2}^3\left(\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ \cos(3\pi)\right)\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots;$$

donc

$$\cos x\mathrm{ch}x=\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{2j}(-1)^j\left(\cos\left(\frac{j\pi}{2}\right)\right)\frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\cos x\mathrm{ch}x=(2)^{-2}\sum_{m=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4m}(-1)^{2m}\left(\cos\left(\frac{2m\pi}{2}\right)\right)\frac{x^{4m}}{(4m)!}$$

$$\cos x\mathrm{ch}x=\sum_{m=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4m-2}(-1)^{2m}(-1)^m\frac{x^{4m}}{(4m)!}.$$

Donc

$$\boxed{\cos x\ \mathrm{ch}\ x=\sum_{m=0}^{+\infty}(2)^{m-2}(-1)^m\frac{x^{4m}}{(4m)!};\qquad \forall x\in\mathbb{R}.(02pts)}$$

2)

Soit $a_m=(-1)^m\dfrac{(2)^{m-2}}{(4m)!}$

D'après d'Alembert, on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|=\lim_{m\to+\infty}\frac{(2)^{2m}}{(2)^{2m-2}}\times\frac{(4m)!}{(4m+4)!}=0.(1pt)$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n$ avec $n=4m$ est converge$\forall x\in\mathbb{R}.(1pt)$

Exercice 3: $(06pts)$

1) Soit γune fonction de période 2π définie sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de γ est

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n>0}a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$$

Où

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\gamma(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \gamma(x)\cos(nx)\,dx;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \gamma(x)\sin(nx)\,dx$$
• La fonction f est impaire car $\forall t \in \mathbb{R}\,; f(t) = -f(-t)$, donc
$$a_0 = a_n = 0; \forall n \geq 1 (0{,}125pt)$$
Pour $\gamma = f$, la série de Fourier de f est
$$\sum_{n>0} b_n \sin(nt); \, (0{,}125pt)$$
avec
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\alpha x)\sin(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} \sin(\alpha x)\sin(nx)\,dx (0{,}125pt)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{+\pi} \cos[x(\alpha-n)] - \cos[x(\alpha+n)]\right] dx$$
$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin[\pi(\alpha-n)]}{(\alpha-n)} - \frac{\sin[\pi(\alpha+n)]}{(\alpha+n)}\right]$$
$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2.n}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \sin(\alpha.\pi)}{(\alpha^2-n^2)}\right]} (0{,}5pt)$$
Donc la série de Fourier associée
$$\boxed{\frac{2}{\pi}\sum_{n>0}\left[\frac{(-1)^n.n.\sin(\alpha.\pi)}{(\alpha^2-n^2)}\right] \sin(nt).(I)(0{,}5pt)}$$
• La fonction g est impaire car $\forall t \in \mathbb{R};\ g(t) = g(-t)$, donc $b_n = 0; \forall n \geq 1 (0{,}125pt)$
Pour $\gamma = f$, la série de Fourier de g est
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n \cos(nt); \, (0{,}125pt)$$
avec
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\alpha x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} \cos \alpha x\,dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha} (0{,}25pt)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx \, (0{,}125pt)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{+\pi} \cos[x(\alpha+n)] + \cos[x(\alpha-n)]\right] dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin[\pi(\alpha+n)]}{(\alpha+n)} + \frac{\sin[\pi(\alpha-n)]}{(\alpha-n)}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \sin(\alpha.\pi)}{(\alpha+n)} + \frac{(-1)^n \sin(\alpha.\pi)}{(\alpha-n)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \sin(\alpha.\pi)}{(\alpha^2-n^2)}\right]} (0{,}5pt)$$

Donc la série de Fourier associée

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\times\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}+\frac{2\alpha\sin(\alpha.\pi)}{\pi}\sum_{n>0}\left[\frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)}\right]\cos(nt). \qquad (II)\ (0{,}5pt)}$$

2) On a $\sum_n |a_n|$ est converge car $|a_n| \le \frac{2}{n^2}$ donc la série (I) est converge. $(0{,}25pt)$

On a $\sum_n |b_n|$ est converge car $|b_n| \le \frac{2}{n^2}$ donc la série (II) est converge. $(0{,}25pt)$

3) D'après le théorème de Dirichlet :

f est continue sur $(-\pi,\pi)$ et monotone pour des nombres fini des intervalles de $(-\pi,\pi)$, $(0{,}25pt)$ donc

$$(I) = f(t); \forall t \in \mathbb{R}. (0{,}5pt)$$

4) D'après le théorème de Dirichlet :

$$(II) = g(t); \forall t \in \mathbb{R}. (0{,}5pt)$$

5) $h(t) = e^{i\alpha t} = f(t) + ig(t)$ pour $|t| \le \pi$.

$h(t) = I + iII\, (0{,}75pt)$

6) On a :

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\times\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}+\frac{1}{\pi}\sum_{n>0}\left[\frac{\sin[\pi(\alpha+n)]}{(\alpha+n)}+\frac{\sin[\pi(\alpha-n)]}{(\alpha-n)}\right]\cos(nt); \forall t \in \mathbb{R}$$

Pour $t = \pi$ $(0{,}25pt)$

$$g(\pi) = \frac{2}{\pi}\times\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}+\frac{2\alpha\sin(\alpha.\pi)}{\pi}\sum_{n>0}\left(\left[\frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)}\right]\cos(n\pi)\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n>0}\left(\left[\frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)}\right](-1)^n\right) = \frac{\alpha.\pi\cos(\alpha.\pi)-2\sin(\pi\alpha)}{\alpha.\pi}\times\frac{\pi}{2\alpha\sin(\alpha.\pi)}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n>0}\frac{1}{(\alpha^2-n^2)} = \frac{\pi}{2}\times\cot(\alpha.\pi)-\frac{1}{\alpha^2\sin(\alpha.\pi)}. \qquad (0{,}5pt)}$$

Exercice 4: $(05pts) + 1$pt

1- La transformation de Fourier de f est une fonction $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\,2\pi st}\,dt$$

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\cos(2\pi st)\,dt\,; \quad \text{car la fonction f est paire.}$$

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\times\left(\frac{e^{i\,2\pi st}+e^{-i\,2\pi st}}{2}\right)dt\,;$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left(\frac{e^{c(\alpha+i2\pi s)}}{(\alpha+i2\pi s)}-\frac{1}{(\alpha+i2\pi s)}\right)+\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{e^{c(\alpha-i2\pi s)}}{(\alpha-i2\pi s)}-\frac{1}{(\alpha-i2\pi s)}\right)$$

Donc la transformation de Fourier de f existe si et seulement si $\alpha \leq 0$. $(0{,}75pt)$

2-

$$\mathcal{F}(f)(s) = -\left(\frac{1}{(\alpha+i2\pi s)}+\frac{1}{(\alpha-i2\pi s)}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(s) = -\left(\frac{2}{(\alpha^2+(2\pi s)^2)}\right). \quad (0{,}75pt)}$$

3- $\mathcal{O}\backslash \dashv\neg$ $\mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{L}(f^+)(i\lambda)+\mathcal{L}(f^-)(-i\lambda)$ $\emptyset \dashv\sqsubseteq]\rfloor$ $\lambda = 2\pi s$

Où

$$\forall t<0; f^- = f^+ = 0;$$
$$\forall t\geq 0; f^- = f^+ = e^{\alpha t}$$

On a :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \left(\frac{1}{(-\alpha+i\lambda)}+\frac{1}{(-\alpha-i\lambda)}\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{(-\alpha+p)}. \quad (0{,}75pt)}$$

4- On définit le produit de convolution par :

$$(f*f)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha|u|}e^{\alpha|t-u|}\,du. \ (0{,}75pt)$$

$\mathcal{F}(f*f)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\times\mathcal{F}(f)(\lambda)$,donc

$$\boxed{\mathcal{F}(f*f)(\lambda) = \left(\frac{2}{\alpha^2+(2\pi s)^2}\right)^2 \ (0{,}75pt)}$$

.

5- Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. La transformation de Laplace:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt; p\in\mathbb{C}$$

• Résoudre l'équation (1) par Laplace :

$$y''(x)+\ y'(x)-\ y(x) = f(x);\ y(0) = y'(0) = 0;\ \ x\geq 0 \quad (1)$$

On note par : $y(t)\overset{\mathcal{L}}{\to}Y(p)$et $f(t)\overset{\mathcal{L}}{\to}F(p)$

On a :

$\mathcal{L}[y''(x)+\ y'(x)-\ y(x)]$(p)=$\mathcal{L}[f(x)](p)$

$\Rightarrow\mathcal{L}(y''(x))(p)+\mathcal{L}(y'(x))(p)-\mathcal{L}(y(x))(p)$(p)=$\mathcal{L}[f(x)](p)$ *La linéarité de Laplace*

$\Rightarrow[p^2Y(p)-p\,y'(0)-y(0)]+[pY(p)-y(0)]-Y(p) = F(p)$

$\Rightarrow(p^2+p-1)Y(p) = F(p)$

$\Rightarrow Y(p) = \dfrac{F(p)}{(p^2+p-1)}$

$\Rightarrow Y(p) = \dfrac{1}{(p-\alpha)(p^2+p-1)}$

Soient R_1 et R_2 les racines d'équation $p^2+p-1 = 0$, donc

$$Y(p)=\frac{A}{(p-\alpha)}+\frac{B}{(p-R_1)}+\frac{C}{(p-R_2)};A,B,C\ \in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow\boxed{y(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{R_1t}+Ce^{R_2t}}(0{,}75pt)$

Application:

Soient $P(p)=1$ et $Q(p)=(p-\alpha)(p^2+p-1)\Rightarrow Q'(p)=p^2+2(1-\alpha)p-1-\alpha$.

On a :

$$A=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)};B=\frac{P(R_1)}{Q'(R_1)};C=\frac{P(R_2)}{Q'(R_2)}.$$

Donc

$$\boxed{y(t)=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}e^{\alpha t}+\frac{P(R_1)}{Q'(R_1)}e^{R_1t}+\frac{P(R_2)}{Q'(R_2)}e^{R_2t}.(0{,}5pt)}$$

• Résoudre l'équation (1) par Fourier :

$$y''(x)+\ y'(x)-\ y(x)=f(x);\ y(0)=\ y'\ (0)=0;\ \ x\geq 0\quad (1)$$

On note par : $y(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}Y(s)$et $f(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}F(s)$

On a:

$\mathcal{F}[y''(x)+\ y'(x)-\ y(x)](\mathrm{p})=\mathcal{F}[f(x)](s)$

$\Rightarrow\mathcal{F}\big(y''(x)\big)(s)+\ \mathcal{F}\big(y'(x)\big)(s)-\ \mathcal{F}\big(y(x)\big)(s)(\mathrm{p})=\mathcal{F}[f(x)](s) Lalinéarité\ deLaplace$

$\Rightarrow(i2\pi s)^2Y(s)+(i2\pi s)Y(s)-Y(s)=F(s)$

$\Rightarrow((i2\pi s)^2+(i2\pi s)-1)Y(s)=F(s)$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{F(s)}{((i2\pi s)^2+(i2\pi s)-1)}$$

$$\Rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(s)}{((i2\pi s)^2+(i2\pi s)-1)}\times e^{i\,2\pi st}\ ds.\qquad (0{,}25pt)$$

Application:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{(\alpha-i2\pi s)}}{((i2\pi s)^2+(i2\pi s)-1)}\times e^{i\,2\pi st}\ ds;$$

donc

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{(\alpha-i2\pi s)((i2\pi s)^2+(i2\pi s)-1)}\times e^{i\,2\pi st}\ ds.\qquad (0{,}75pt)}$$