E.P.S.T. d'Oran.

2011-2012.

Devoir surveillé

Module : Algèbre 4. Durée 01h30

Exercice 1 *(05 pts).*

Nous rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est dite orthogonale si elle vérifie ${}^tAA = I_n$. Répondez aux questions suivantes :

1. La somme de deux matrices orthogonales est-elle une matrice orthogonale ?
2. Le produit de deux matrices orthogonales est-elle une matrice orthogonale ?
3. Le produit d'une matrice orthogonale par un scalaire est-elle une matrice orthogonale ?

Exercice 2 *(04 pts).*

Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \ , \ < f(x), f(y) > = \ a < x, y > .$$

Montrer que f est un endormorphisme de E.
Indication : Calculer $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2$ et $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *(05 pts).*

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E des suites complexes bornées. On définit sur E la forme

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \ , \ < u, v > = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{u}_n v_n}{2^n}.$$

1. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel des suites presque nulles (i.e. dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang) de E. Déterminer l'orthogonal de F dans E.

Exercice 4 *(06 pts).*

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On pose $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $x_j = f(e_j)$, $j = 1, .., n$. Soit $S = (\alpha_{ij})$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée dans la base B à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$.

1. Exprimer tout vecteur x_j dans la base B.
2. Calculer $< x_j, u >$.
3. En déduire que $|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}| \leq n$.

Ecole préparatoire en Sciences et techniques d'Oran

Correction DS2 Algèbre 4

Exercices 1 :

1) Non, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale mais $A + A$ ne l'est pas
2) Oui, soient A, B deux matrices carrées orthogonales, Alors :

$$(AB)^t(AB) = I_n$$

3) Non, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $2.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale

Exercices 2 :

On trouve $\|f(x+y) - f(x) - f(y))\|^2 = 0 \; et \; \left\|f\left(\lambda x\right) - \lambda f(x)\right\|^2$

f Endomorphisme d'espaces vectoriels.

On remarque que f n'est pas un Endomorphisme de l'espaces préhilbertiens puisque

$< f(x), f(y) > \neq < x, y >$.

Exercices 03 :

1) – linéarité % â la 2_s^p coordonnée
   – hermitienne
   – non dégénérée
   – positive

2) $F^{\perp} = \{0\}$

Exercices 04 :

1) $x_j = f\left(e_j\right) = s \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{j linge} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \, e_i$$

2) $< x_j, \cup > = < \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \, e_i , \sum_{k=1}^{n} e_k >$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij} < e_i, e_k > = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$$

3) $\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} < x_j , \cup >\right| = \left|< \sum_{j=1}^{n} x_j , \cup >\right|$

$=\left|< \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\ ,\cup >\right|$

$= \left|< f\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right),\cup >\right| = |< f(\cup),\cup>|$

$\leq \| f(\cup) \| . \| \cup \|$ (Inégalité Canely Schwarz)

Or f est un automorphisme orthogonal (car de nature orthogonale) donc

$\| f(\cup) \| . \| \cup \|$ Or $\|\cup\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ d'où le résultat