Ecole Préparatoire en Sciences et Technique d'Oran.
Unité de Physique 3 : Ondes et Vibrations
2011 / 2012 **12/12/2011**

<u>Devoir Surveillé</u>

<u>Durée : 1h45</u>

<u>Exercice 1:</u> Deux masses égales (m) sont reliées entre elles par des ressorts ayant la même constante de raideur k comme représenté sur la figure 1.

- Ecrire le Lagrangien du système et ces équations du mouvement
- Déterminer les pulsations propres du système
- Trouver le rapport entre les amplitudes des deux masses dans chacun des deux modes et écrire la solution générale pour le mouvement de chacune des masses

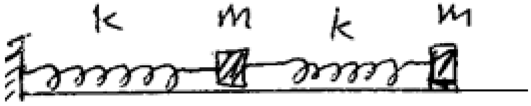


figure 1

<u>Exercice 2 :</u>

Dans le système illustré sur la figure 2, la masse m vaut 1,5 kg et k=8 N/m. La force d'ammortissement est donné par $f=-\beta\dot{x}$, avec β=230gr/s. En supposant que la masse est initialement tirée vers le bas à partir de sa position d'équilibre sur une distance de 12 cm puis relachée sans vitesse initiale.

- Déterminer en fonction du temps la position de la masse. (on utilisera les conditions initiales pour déterminer les constantes)
- Calculez le temps t_1 requis pour que l'amplitude des oscillations devienne égale à un tiers de sa valeur initiale
- Combien d'oscillations la masse a-t-elle accomplie à cet instant. Calculer le décrément logarithmique et le facteur de qualité de l'oscillateur

figure2

<u>Exercice 3 :</u> Deux masses M et m sont libres de se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal ox. Elles sont couplées par un ressort de constante de raideur K (figure 3). On suppose en plus que M est soumise à la force d'excitation $F = F_m \cos(\Omega t)$.

- Déterminer les mouvements des deux masses. Montrer que le rapport des amplitudes est : $B/_A = K/(K - m\Omega^2)$.
- Dire comment doit-on choisir le ressort pour que la vibration de m soit très faible pour Ω fixé.

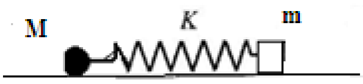


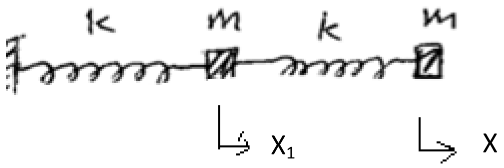
Figure 3

Unité : ondes et vibrations

Correction des devoir surveillé n°1

2eme année 2011/2012

Excercices1 :



$$L=\frac{1}{2}m(x_1^2+x_1^2)-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

Les équations d'Eulen Lagrange sont :

$$Mx''_1+2kx_1-kx_2=0$$

$$Mx''_2+kx_2-x_1=0$$

On cherche des solutions harmoniques de même pulsation de la forme:

x_1 =a coswt x_2=b coswt

En injectant dans le système d'équation on obtenant le système d'équations algébriques

(Les inconnues étant a et b)

$$\begin{cases}(2k-m\omega^2)\,a-kb=0\\-k\,a+(k-m\omega^2)\,b=0\end{cases}$$

On ouvre les solutions non toutes nulles à condition que le déterminent du système soit nul
Donc on doit en avoir :

$$(2k-mw^2)(K\ mw^2)-k^2=0$$

Cette équation admet deux solutions : $w_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $w_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$

<u>Dans le mode 1</u> : en injectant w=w1 dans le système d'équation on montre que :

$$b_1/a_1=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

<u>Dans le mode 2</u> : on trouve :

$b_2/a_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

La solution générale est une combinaison des solutions des deux modes :

x_1 (t)=$a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$

x_2 (t)=$-[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]\, a_1 \cos \omega_1 t + \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_2 \cos \omega_2 t$

<u>Exercice2</u>

$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+kx=0 \quad => \ddot{x}+\beta/m\, \dot{x}+k/m\ x=0$

$=\ddot{x} +2\alpha\dot{x}+w_0^2 x=0$

L'équation caractéristique : $r^2+2\alpha r+\omega_0^2=0$

$=> \Delta= 4\alpha^2 -4\omega_0^2=4(\alpha^2-\omega_0^2)$

$\omega_0^2=k/m$=2,30sed

$\beta/m=2\alpha => \alpha = 0{,}076$

On est dans le cas $\alpha < \omega_0$ il existe deux solutions

Pour : $r_1=-\alpha + i\omega$, $r_2=-\alpha - i\omega$ on pose $\omega=\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Et la solution générale pour x(t) s'écrit :

$X(t) =Ae^{-\alpha t} \cos (\omega\, t+\emptyset)$ avec $\omega =\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

ω =2,30rad/s

A t=0 $x(0)=A \cos \emptyset=-0{,}12$ m

$\dot{x}(0)=-A\omega\sin\emptyset-A\alpha\cos\emptyset=0$

$=>A\cos \emptyset=-0{,}12$ et $A \sin \emptyset=-\frac{0{,}12\alpha}{\omega}=0{,}0039$

$=> Ag\emptyset=\frac{A\sin \emptyset}{A\cos \emptyset}=\frac{0{,}0039}{-0{,}12}=-0{,}033=\emptyset => \emptyset = -0{,}00329\, v$

Et A=-0 ,120m

$=>X(t)=-0{,}121e^{-0{,}076t} \cos (2{,}30t-0{,}0329)$

$A (t1)=\frac{A(0)}{3}=e^{-\alpha t_1} =1/3$

$=> -\alpha t1 = \ln({}^{1}/_{3})$ $=> t_1 = -\frac{1}{\alpha}\ln({}^{1}/_{3}) => t_1 = 14{,}45$

Sachant que $T = \frac{2T}{\omega} + 2{,}73s$,alors le nombre d'oscillation est :$n = \frac{t1}{T} \cong 5{,}31$ oscillations

$\delta = \alpha t = 0{,}076.2{,}73 = 0{,}207$

$\delta_a = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{2{,}30}{2\ .0{,}076} = 15{,}13$

<u>Excercice3 :</u>

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2\, x_1 - \omega_0^2\, x_1 = \frac{F_m}{M}\cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0'^2\, x_2 - \omega_0'^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ et $\omega_0'^2 = \frac{k}{m}$

On cherche des solutions de la forme :

$X_1 = a\cos(\Omega t)$

$X_2 = b\cos(\Omega t)$

En injection dans le système d'équation on obtient

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2)\, a - \omega_0^2 b = {}^{Fm}/_{M} \\ -\omega_0'^2\, a + (\omega_0'^2 - \Omega^2)\, b = 0 \end{cases}$$

Solution :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} {}^{Fm}/_{M} & -\omega_0^2 \\ 0 & (\omega_0'^2 - \Omega^2) \end{vmatrix}}{\underbrace{(\omega_0'^2 - \Omega^2)(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_0^2\ \omega_0'^2}_{=\Delta}} = \frac{1}{\Delta}\ {}^{Fm}/_{M} \cdot (\omega_0'^2 - \Omega^2)$$

Et $$b = \frac{\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & {}^{Fm}/_{M} \\ -\omega_0'^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\ \omega_0'^2\ {}^{Fm}/_{M}$$

D'on $b/a = \dfrac{1/\Delta \, \omega_0'^2 \, Fm/M}{1/\Delta \, \frac{Fm}{M}(\omega_0'^2 - \Omega^2)}$

$$= \frac{\omega_0'^2}{(\omega_0'^2 - \Omega^2)}$$

$$b/a = \frac{k}{k - m\,\Omega^2}$$

Pour avoir une vibration très faible de m (pour Ω fixé), il faut avoir :

$$b/a << 1 \Rightarrow \frac{k}{k - m\Omega^2} \ll 1$$

$$\Rightarrow k << m\Omega^2.$$