Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques D'Oran
2eme année
Devoir Surveillé, Analyse Numérique 01
13/12/2011 (*La durée* : 1^h : 30)

Documents ; Téléphone ; ... non autorisés
N.B : a chaque utilisation d'un théorème ou d'autre résultat du cours, rappeler soigneusement (et vérifier) les hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer, faute de quoi la conclusion n'a pas de valeur.

Exercice 1:(6pts) (point fixe).
On veut calculer le zéro $r = 1$ de la fonction $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ en utilisant l'algorithme de points fixes

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 7x_n^2 + (7+w)x_n - 15}{w},$$

où w est un paramètre réel strictement négatif ($w < 0$).
1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre w le zéro de la fonction $f(x)$ est-il un point fixe de la méthode proposée?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de w la méthode proposée converge-t-elle?
3. Pour qu'elle valeur de w la méthode proposée converge-t-elle plus vite? Quel est l'ordre de convergence dans ce cas?

Exercice 2:(7pts) (Décomposition LU)
Certaines matrices symétriques mènent à une factorisation de la forme LL^t, où L est une matrice triangulaire inférieure.
1. Expliquer pourquoi on s'intéresse à ce cas particulier de la factorisation LU (par rapport à la méthode de Croute).
2. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 9x + 3y + 3z = 15 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ 3x + y + 5z = 9 \end{cases}$$

à l'aide d'une factorisation LL^t.

Exercice 3:(7pts) (Méthodes itératives)
Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel tel que $a \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
1. Pour $a = -1/2$, faire trois itérations de la méthode de *Gauss-Seidel* en partant de l'approximation initiale $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.
2. Pour qu'elles valeurs de a, la convergence de la méthode de *Gauss-Seidel* est-elle assurée?
3. Pour $a = -1/2$, donner la matrice d'itérations T_J de la méthode de *Jacobi.* Sachant que la matrice T_J possède les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}/2$ et $\lambda_3 = \sqrt{2}/2$,est-ce que la méthode *Gauss-Seidel* converge pour ce système linéaire?

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Kh. ZENNIR
BON COURAGE

(EPST. 2EME ANNÉE 2011/2012)
CORRIGÉS (INDICE) DU DS D'ANALYSE NUMERIQUE 01

Exercice 1.

1. On pose $\boxed{\textbf{2pt}}$

$$g(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + (7+w)x - 15}{w},$$

il suffit en suite de montrer que $g(1) = 1$. (En utilisant la définition du point fixe)
2. L'algorithme de points fixes converge
(En utilisant la notion de convergence de la méthode des points fixes). $\boxed{\textbf{2pt}}$
3. La converge est rapide (ordre 2) .$\boxed{\textbf{2pt}}$
(En utilisant la notion d'ordre de convergence de la méthode des points fixes)

Exercice 2.

1. La décomposition de Cholesky nécessite 2 fois moins d'opérations que celle de Crout et le stockage d'une seule matrice. $\boxed{\textbf{2pt}}$
2. En Appliquant l'algorithme de la décomposition de Cholesky $\boxed{\textbf{3pt}}$

$$A = LL^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On résout $Ly = (15, 9, 9)^t$ pour obtenir $y = (5,\ 5,\ 2)^t$ et ensuite $L^t X = y$ pour calculer la solution $X = (1, 1, 1)^t$. $\boxed{\textbf{2pt}}$

Exercice 3. On a

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} y^{(n)} \\ y^{(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} x^{(n+1)} + \frac{1}{2} z^{(n)} \\ z^{(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} y^{(n+1)} \end{cases}$$

1. En partant de l'itération initiale $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$,
on obtient avec la méthode de *Gauss-Seidel* l'itération suivante: $X^{(1)} = (1, 3/2, 7/4)^t, X^{(2)} = (7/4, 11/4, 19/8)^t$ et $X^{(3)} = (19/8, 27/8, 43/16)^t$. $\boxed{\textbf{2pt}}$(Appliquons l'algorithme de *Gauss-Seidel)*,
2. Pour $-1/2 < a < 1/2$, la convergence de la méthode de *Gauss-Seidel* est assurée car la matrice A est à diagonale strictement dominante. $\boxed{\textbf{2pt}}$ (Notion de convergence de la méthode de *Gauss-Seidel)*.
3. La méthode de Gauss-Seidel est une variante améliorée de la méthode de *Jacobi* La matrice d'itération de *Jacobi* est $\boxed{\textbf{1pt}}$

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

En se servant des valeurs propres de la matrice T_J, on a $\rho(T_J) = \sqrt{2}/2 < 1$.$\boxed{\textbf{1pt}}$
La méthode de Jacobi converge, ce qui entraine la convergence de la méthode de *Gauss-Seidel* car elle est plus rapide. $\boxed{\textbf{1pt}}$

Khaled ZENNIR