Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran.

1ère année
07 Février 2012
Durée : 2 heures (+30mn)

Épreuve d'Algèbre du 1^{er} *semestre*

Exercice 1.

1. Soit E un ensemble. Montrer que pour A et B de $P(E)$:
   (a) $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$.
   (b) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow B \subset A = B$.
2. Soit la relation $\sim$ dans $P(E)$ définie par :

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists X \subset E \,/\, X \cap A = X \cap B$$

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner les classes d'équivalence de $\varnothing$ et de E .

Exercice 2.

1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
   (a) Montrer que $\forall \alpha \neq 0 : f(\alpha) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
   (b) f est-elle une application ? est-elle bijective ? Pourquoi ?
2. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I : \ g(x) \leqslant 2$.
   (b) Montrer que g est une bijection de I vers l'intervalle $J =]0, 2[$. Trouver g^{-1}.
3. Soit l'application h de J vers J telle que : $\forall x \in J : \ h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
   (a) Montrer que h est bijective et donner sa bijection réciproque.
   (b) Définir l'application $h \circ g$.
   (c) Trouver l'intervalle pour lequel l'application $h \circ g$ est bijective.
   (d) Montrer que $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$

Exercice 3.

1. Soit $(G, .)$ un groupe non commutatif. Pour un α de G, on note l'application :

$$\begin{array}{rll} f_\alpha : & G & \longrightarrow G \\ & x & \longmapsto f_\alpha(x) = \alpha x \alpha^{-1} \end{array}$$

   On pose $G' = \{f_\alpha \ \alpha \in G\}$.
   (a) Montrer que G' est un groupe pour la loi $\circ$.
   (b) Montrer que l'application $g : \alpha \longmapsto f_\alpha$ est un morphisme de G vers G' .
2. On définit deux lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}^2$ telles que : $\forall (a_1\,;\,b_1), (a_2\,;\,b_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} (a_1\,;\,b_1) + (a_2\,;\,b_2) = (a_1 + a_2\,;\,b_1 + b_2) \\ \\ (a_1\,;\,b_1) \times (a_2\,;\,b_2) = (a_1 \times a_2\,;\,b_1 \times b_2 + a_1\,.\,b_2 + a_2 \times b_1) \end{cases}$$

   Montrer que $(\mathbb{Z}^2\,, +\,, \times)$ est un anneau unitaire commutatif.

Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran.

1ère année
07 Février 2012
Durée : 2 heures (+30mn)

Corrigé d'examen d'Algèbre du 1^{er} semestre

Exercice 1. (06 pts)

1. Soit E un ensemble. Montrer que pour A et B de $P(E)$:
   (a) $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$.
   (b) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$.
2. Soit la relation $\sim$ dans $P(E)$ définie par :

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists X \subset E \,/\, X \cap A = X \cap B$$

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Donner les classes d'équivalence de $\varnothing$ et de E .

Solution 1. (06 pts)

1. Montrons que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$:
   (a) $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$.(01 pt)
   On sait que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$: $B \subset A \cup B$ et comme $A \cup B = A$ on obtient $B \subset A$.
   (b) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$.(01 pt)
   $$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A \cup B \subset A \\ A \cup B \subset B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B \subset A \\ A \subset B \end{cases} \Longleftrightarrow A = B$$
2. Soit la relation $\sim$ dans $P(E)$ définie par :

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists X \subset E \,/\, X \cap A = X \cap B$$

   (a) $\sim$ est une relation d'équivalence :
   $\sim$ réflexive, $\sim$ symétrique, $\sim$ transitive(0,5+0,5+0,5 pts)
   (b) Les classes d'équivalence de ϕ et E :
   $\dot{\phi} = \{Y \in \mathcal{P}(E);\ \phi \sim Y\} =$ ...(01,25 pts)
   $\dot{E} = \{Y \in \mathcal{P}(E);\ E \sim Y\} =$ ...(01,25 pts)

Exercice 2. (07 pts)

1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
   (a) Montrer que $\forall \alpha \neq 0 : f(\alpha) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
   (b) f est-elle une application ? est-elle bijective ? Pourquoi ?
2. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I :\ g(x) \leqslant 2$.
   (b) Montrer que g est une bijection de I vers l'intervalle $J =]0, 2[$. Trouver g^{-1}.
3. Soit l'application h de J vers J telle que : $\forall x \in J :\ h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
   (a) Montrer que h est bijective et donner sa bijection réciproque.
   (b) Définir l'application $h \circ g$.
   (c) Trouver l'intervalle pour lequel l'application $h \circ g$ est bijective.
   (d) Montrer que $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$

Solution 2. (07 pts)

1. Soit f la fonction définie si dessus.
   (a) $\forall \alpha \neq 0;\ f(\alpha) = f(\frac{1}{\alpha})$.(0,5 pt)
   (b) f est une application (domaine de définition $\mathbb{R}$ tout entier) car tout élément de $\mathbb{R}$ admet exactement une et une seule image, qui n'est pas bijective car elle n'est pas injective d'après la première question. $(\alpha) = f(\frac{1}{\alpha})$ malgré que $\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$.(01 pt)
2. Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$.
   (a) Montrons que $\forall x \in I;\ g(x) \leq 2$:
   $g(x) - 2 = \frac{4x}{x^2+1} - 2 = -2\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0$. D'où,$g(x) \leq 2$.(01 pt)
   (b) Montrons que g est une bijection de I vers $J =]0, 2[$:(01,5 pts)
   g **injective :**(0,5 pt)$\forall x_1, x_2 \in I;\ g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$?
   $g(x_1) = g(x_2) \Longleftrightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2+1} \Longleftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \Longrightarrow$ $x_1 = x_2$ où $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ce qui est impossible car $x_1, x_2 \in I$.
   D'où, $g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, donc g est injective.

   g **surjective :**(0,5 pt)$\forall y \in]0, 2[;\ \exists ? x \in [1, +\infty[$ tel que $g(x) = y$:
   $\frac{4x}{x^2+1} = y \Longrightarrow yx^2 - 4x + y = 0$.
   $\triangle = 16 - 4y \geq 0$ car $y \in]0, 2[\Longrightarrow x_1 = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ où $x_2 = 2 - 2\sqrt{4 - y^2}$ (cette solution ne convient pas).
   D'où, $x = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ qui existe $\forall y \in]0, 2[$.
   Ainsi, g est bijective de plus :

$$g^{-1} : \begin{array}{rcl}]0, 2[\longrightarrow & &]1, +\infty[\\ x \longrightarrow & & 2 + 2\sqrt{4 - y^2} \end{array} \quad (0,5pts)$$

3. Soit h l'application définie si dessus.
   (a) h est bijective (injective+ surjective) (évident)(01 pt). $h^{-1}(y) = \sqrt{4 - y^2}$(0,5 pt)
   (b) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = ...$(0,5 pt)
   (c) $h \circ g$ est bijective sur l'intervalle $]1, +\infty[$.(0,5 pt)
   (d) Montrons que $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$:
   il suffit de vérifier que :

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ (g^{-1} \circ h^{-1})(x) &= (h \circ g) \circ (g^{-1}(h^{-1}(x))) \\ &= h \circ [g \circ g^{-1}(h^{-1}(x))] \\ &= h[h^{-1}(x)] = x \ (0,5pt) \end{aligned}$$

Exercice 3. (07 pts)

1. Soit $(G, .)$ un groupe non commutatif. Pour un α de G, on note l'application :

$$f_\alpha : \begin{array}{rl} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto f_\alpha(x) = \alpha x \alpha^{-1} \end{array}$$

   On pose $G' = \{f_\alpha\ \alpha \in G\}$.
   (a) Montrer que G' est un groupe pour la loi $\circ$.
   (b) Montrer que l'application $g : \alpha \longmapsto f_\alpha$ est un morphisme de G vers G' .
2. On définit deux lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}^2$ telles que : $\forall (a_1\,;\,b_1), (a_2\,;\,b_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} (a_1\,;\,b_1) + (a_2\,;\,b_2) = (a_1 + a_2\,;\,b_1 + b_2) \\ \\ (a_1\,;\,b_1) \times (a_2\,;\,b_2) = (a_1 \times a_2\,;\,b_1 \times b_2 + a_1\,.\,b_2 + a_2 \times b_1) \end{cases}$$

   Montrer que $(\mathbb{Z}^2\,, +\,, \times)$ est un anneau unitaire commutatif.

Solution 3. (07 pts)

1. **(a)** Montrons que $(G', \circ)$ est un groupe.(02 pts)

   (a) $\circ$ est une LCI sur G' :
   $\forall a, b \in G;\ f_a \circ f_b \in G'$, en effet : $\forall x \in G;$
   $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1}$.
   D'où, $f_a \circ f_b = f_{ab} \in G'$ car $ab \in G$. (0,5 pt)

   (b) $\circ$ est associative :

   $$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{(ab)} \circ f_c = f_{(ab)c} = f_{a(bc)} = f_a \circ (f_b \circ f_c)$$

   car la loi $(G, .)$ est un groupe, et donc "." est associative.(0,5 pt)

   (c) G' admet un élément neutre pour la loi $\circ$ égale à $f_e = Id_G$ où e est l'élément neutre de G pour la loi "." car :
   $f_a \circ f_e = f_{ae} = f_a = f_{ea} = f_e \circ f_a$ et $\forall x \in G;\ f_e(x) = exe^{-1} = x = Id_G(x)$.(0,5 pt)

   (d) L'élément inverse : $\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G$ tel que : $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$ car :

   $$f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e = Id_G = f_{a^{-1}} \circ f_a (0,5pt)$$

   (b) L'application $g : \alpha \longrightarrow f_\alpha$ est un morphisme de G vers G' car :

   $$\forall \alpha, \beta \in G;\ g(\alpha\beta) = f_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta = g(\alpha) \circ g(\beta) (01pt)$$

2. Montrons que $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif :(04 pts)

   (a) $(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe commutatif.(02 pts)

   (b) " $\times$ " est une loi associative, de plus elle est commutative.(0,5 pt)

   (c) " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " $+$ ".(0,5 pt)

   (d) " $\times$ " admet dans $\mathbb{Z}^2$ un élément d'unité donné par le couple $(1, 0)$. (01 pt)