Ecole préparatoire en sciences et techniques d'Oran

1ère Année **Durée : 1h30**

Devoir surveillé N°2 d'Algèbre.

Exercice n°1 :

I. Soit E un espace vectoriel de dimension $dimE = 12$, et soit S une famille de n vecteurs de E. Parmi les propriétés suivantes les quelles sont toujours vraies?

1. S est une famille génératrice de $E \Rightarrow S$ est une base de E.
2. S est une famille libre et $n = 12 \Rightarrow S$ engendre E.
3. S engendre $E \Rightarrow S$ est une famille libre et $n = 12$.
4. $n = 12 \Rightarrow S$ engendre E.

II. Si E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^9$ engendré par une famille de 9 vecteurs linéairement indépendants, que peut-on dire de la dimension de E ?
Si E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{18}$ engendré par une famille de 19 vecteurs linéairement indépendants, que peut-on dire de la dimension de E ?

Exercice n°2 :

Montrer que le produit cartésien de deux groupes $(E;\Delta)$ et $(G;\star)$ est un groupe pour la loi $\otimes$ définie par :

$$\forall\,(x;y)\ ;\ (x';y') \in E \times G\ ;\ (x;y) \otimes (x';y') = (x\,\Delta\,x';\ y \star y').$$

Exercice n°3 :

1) a\ Montrer que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $V_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $V_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; Constituent une bas de $\mathbb{R}^3$.

b\ Calculer, dans cette base, les composantes de $X_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et de $X_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2) Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, la famille : $U_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $U_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$; $U_4 = \begin{pmatrix}12\\-2\\2\end{pmatrix}$

est une famille liée.

3) Soient deux applications f et g telles que:

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2x-y\\x+y\\z-x\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Montrer que f et g sont des homomorphismes de groupes.

Bon Courage