ECOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES D'ORAN.

2011-2012.

Durée = 2h

Devoir surveillé N°1

MODULE : ALGÈBRE I. PREMIÈRE ANNÉE

Exercice 1. -Ecrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les implications suivantes :

1. Si n est entier naturel tel que n^2 est impair, alors n est impair.
2. Si n est entier naturel tel que (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

-Ecrire les contraposées des propositions précédentes.
-Montrer la contraposée de la première proposition.
-A-t-on démontré l'implication 1 ?

Exercice 2. Soit $E = \{a\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

Exercice 3. Soient E un ensemble fini non vide, et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

(a) $f(\phi) = \phi$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E);\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) $\forall A \in \mathcal{P}(E); \mathrm{card}A \leq \mathrm{card}f(A)$.

I- Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$\begin{array}{ccc} A \subset B & \Longrightarrow & f(A) \subset f(B) \\ f(A \cap B) & \subset & f(A) \cap f(B) \end{array}$$

- Montrer que $f(E) = E$.

II- Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que :$\mathrm{card}A = \mathrm{card}f(A)$ et $\mathrm{card}B = \mathrm{card}f(B)$
Montrer que :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{card}(A \cup B) & = & \mathrm{card}f(A \cup B) \\ \mathrm{card}(A \cap B) & = & \mathrm{card}f(A \cap B) \end{array}$$

Indication :$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

III- Soit E un ensemble non vide, on définit pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ l'application $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ telle que$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$
χ_A s'appelle la fonction caractéristique de A.
Montrer que :

1. $\chi_A \leq \chi_B \Longleftrightarrow A \subset B$
2. $\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$

Exercice 4. Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
-Montrer que deux classes sont disjointes ou égales.
-Prouver que l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.

ECOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES D'ORAN.

2011-2012.

Corrigé du devoir surveillé N°1

MODULE : ALGÈBRE I. PREMIÈRE ANNÉE

Exercice 1. (05 pts) -Ecrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les implications suivantes :

1. Si n est entier naturel tel que n^2 est impair, alors n est impair.(01 pts)
2. Si n est entier naturel tel que (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.(01 pts)

-Ecrire les contraposées des propositions précédentes.(02 pts)
-Montrer la contraposée de la première proposition.(0,5 pts)
-A-t-on démontré l'implication 1 ?(0,5 pts)

Correction 1.

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \left[\left(\exists k \in \mathbb{Z}; n^2 = 2k+1\right) \Longrightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}; n = 2k'+1)\right]$ ou bien
   $\forall n \in \mathbb{N} : \left[\left(n^2 \ impair\right) \Longrightarrow (n \ est \ impair)\right]$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \left[\left(n^2 - 1 \neq 8k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right) \Longrightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}; n = 2k')\right]$ ou bien
   $\forall n \in \mathbb{N} : \left[\left(n^2 - 1 \ n'est \ pas \ divisible \ par \ 8\right) \Longrightarrow (n \ est \ pair)\right]$

La contraposition :

1'- Si n est pair alors n^2 est pair. Formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[(\exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k) \Longrightarrow \left(\exists k' \in \mathbb{Z}; n^2 = 2k'\right)\right]$$

2'- Si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[(\exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k+1) \Longrightarrow \left(\exists k' \in \mathbb{Z};\ n^2 - 1 = 8k'\right)\right]$$

Montrons 1' : Si n est pair, alors il s'écrit $n = 2k$ où k est entier.
Mais $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k)$ est donc pair.
-Pour le principe de la contraposition, on a démontré l'implication 1.

Exercice 2. (05 pts) Soit $E = \{a\}$.
Déterminer $\mathcal{P}(E)$(0,5 pts), $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$(01,5 pts) et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$(03 pts).

Correction 2. On a $\mathcal{P}(E) = \{E, \phi\}$.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\mathcal{P}(E), \{E\}, \{\phi\}, \phi\}$.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))) = \{\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)), \{\mathcal{P}(E)\}, \{\{E\}\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi\}, \phi, \{\mathcal{P}(E), \{E\}\},$
$\{\mathcal{P}(E), \{\phi\}\}, \{\mathcal{P}(E), \phi\}, \{\{E\}, \{\phi\}\}, \{\{E\}, \phi\}, \{\{\phi\}, \phi\}, \{\mathcal{P}(E), \{E\}, \{\phi\}\},$
$\{\mathcal{P}(E), \{E\}, \phi\}, \{\mathcal{P}(E), \{\phi\}, \phi\}, \{\{E\}, \{\phi\}, \phi\}\}$.
Remarque : ne pas confondre $\{\phi\}$ et ϕ, card$\{\phi\} = 1$, card$\phi = 0$.

Exercice 3. (07 pts) Soient E un ensemble fini non vide, et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

(a) $f(\phi) = \phi$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E);\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) $\forall A \in \mathcal{P}(E); \operatorname{card} A \leq \operatorname{card} f(A)$.

I- Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$\begin{array}{ccc} A \subset B & \Longrightarrow & f(A) \subset f(B) \text{(01pts)} \\ f(A \cap B) & \subset & f(A) \cap f(B) \text{(01 pts)} \end{array}$$

- Montrer que $f(E) = E$.(01 pts)

II- Soients $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que :$\operatorname{card} A = \operatorname{card} f(A)$ et $\operatorname{card} B = \operatorname{card} f(B)$

Montrer que :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{card}(A \cup B) & = & \operatorname{card} f(A \cup B)(01,5\text{pts}) \\ \operatorname{card}(A \cap B) & = & \operatorname{card} f(A \cap B)(01,5\text{pts}) \end{array}$$

Indication **:**$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

III- Soit E un ensemble non vide, on définit pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ l'application $\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$

χ_A s'appelle la fonction caractéristique de A.

Montrer que :

1. $\chi_A \leq \chi_B \Longleftrightarrow A \subset B$(0,5 pts)
2. $\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$(0,5 pts)

Correction 3.

I-Montrons que pour $A, B \subset E$ telle que $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$:
$A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \backslash A) = A \cup \complement_B A$.
Donc :

$$f(B) = f(A \cup \complement_B A) = f(A) \cup f(\complement_B A) \text{ d'après (b)}$$

alors :

$$f(A) \subset f(B).$$

-Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ **:** On a

$$\left.\begin{array}{lcl} A \cap B \subset A & \Longrightarrow & f(A \cap B) \subset f(A) \\ A \cap B \subset B & \Longrightarrow & f(A \cap B) \subset f(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

-Montrons que $f(E) = E$ **:**
Comme f est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ on a :
$\forall A \in \mathcal{P}(E) :\ f(A) \in \mathcal{P}(E)$. Et donc $f(A) \subset E$.
Ainsi, pour $A = E$ on obtient $f(E) \subset E$, d'où $\mathrm{card} f(E) \leq \mathrm{card} E$.
On a aussi

$$\mathrm{card} E \leq \mathrm{card} f(E) (\text{ hypothèse (c)})$$

Doù, $\mathrm{card} E = \mathrm{card} f(E) \Longrightarrow f(E) = E$.

II-Montrons que :
Si $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que :$\mathrm{card} A = \mathrm{card} f(A)$ et $\mathrm{card} B = \mathrm{card} f(B)$ on a :

1. $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card} f(A \cup B)$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{card}(A \cup B) & = & \mathrm{card}(f(A) \cup f(B)) \\ & = & \mathrm{card} f(A) + \mathrm{card} f(B) \quad - \mathrm{card}(f(A) \cap f(B)) \end{array}$$

   on a : $\mathrm{card} A \cap B \leq \mathrm{card} f(A \cap B) \leq \mathrm{card} f(A) \cap \mathrm{card} f(B)$ (à l'aide de 1)
   donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{card} f(A \cup B) & \leq & \mathrm{card} f(A) + \mathrm{card} f(B) - \mathrm{card} f(A \cap B) \\ & \leq & \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A \cup B) \end{array}$$

   Mais par hypothèse $\mathrm{card}(A \cup B) \leq \mathrm{card} f(A \cup B)$.
   Donc

$$\mathrm{card} f(A \cup B) = \mathrm{card}(A \cup B)$$

2. De la même façon on démontre que $\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card} f(A \cap B)$

III-Montrons que :

1. $\chi_A \leq \chi_B \Longleftrightarrow A \subset B$
2. $\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$

$$\begin{array}{rcc} \chi_A \leq \chi_B & \Longleftrightarrow & \forall x \in E,\ \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in A,\ \chi_B(x) = 1 \\ & \Longleftrightarrow & A \subset B \end{array}$$

On en déduit facilement que $\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$.

Exercice 4. (03 pts) Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
-Montrer que deux classes sont disjointes ou égales.(01,5 pts)
-Prouver que l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.(01,5 pts)

Correction 4.

1. Soit $\dot{x}, \dot{y}$ deux classes d'équivalence disjointes, montrons que $\dot{x} = \dot{y}$
   Comme $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \phi$, alors il existe

$$\begin{array}{rcl} z \in \dot{x} \cap \dot{y} & \Longrightarrow & z \in \dot{x} \; et \; z \in \dot{y} \\ & \Longrightarrow & z\mathcal{R}x \; et \; z\mathcal{R}y \\ & \Longrightarrow & x\mathcal{R}z \; et \; z\mathcal{R}y \quad \Longrightarrow \quad x\mathcal{R}y \\ & \Longrightarrow & \dot{x} = \dot{y} \end{array}$$

   Ainsi, $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \phi \Longrightarrow \dot{x} = \dot{y}$. Autrement dit, $\dot{x} \neq \dot{y} \Longrightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \phi$ ce qui montre que deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales.

2. Montrons que l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.
   On a $E/\mathcal{R} = \{\dot{x};\ x \in E\}$. Or, $\dot{x} = \{y \in E;\ y\mathcal{R}x\}$.
   D'où,$\cup_{x \in E}\dot{x} = E$ et d'après la première question deux classes d'équivalence $\dot{x}, \dot{y}$ differentes de $E/\mathcal{R}$ sont disjointes c'est-à-dire $\dot{x} \cap \dot{y} = \phi$.
   Ainsi $E/\mathcal{R}$ est une partition de E

GHERBI Abdellah :Chargé de Cours
KARA ZAÏTRI Lydia :Chargé de TD
OUEJDI linda :Chargé de TD
ZENNIR Khaled :Chargé de TD