Ecole Préparatoire en Sciences Economiques, Commerciales

Et Sciences de Gestion, Draria.

Le 30 /05/2011

$2^{ième}$ Année

EPREUVE D'ALGEBRE DU $2^{ième}$ SEMESTRE

(Durée : 2 heures)

Exercice 1 : (3 points)

Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m, le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + m^2z = m \end{cases}$$

Exercice 2 : (3points) ((0,75 + 0,25) + (0,5 + 1) + (0,5))

Soit f l'endomorphisme de $IR_2[X]$ défini par

$f(P) = P + 2P'$, où P' est le polynôme dérivé de P

Soit $B = \{1, X, X^2\}$ une base de $IR_2[X]$.

1) Calculer f(1), f(X) et $f(X^2)$.
   En déduire la matrice M de f dans la base B.

2) Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.
   f est-elle bijective ? Si oui donner l'expression de son application réciproque f^{-1}.

Tournez la page s'il vous plait

Exercice 3 : (6 points) ((1+0,5) + (1+0,5) + (0,5+1+0,5) + (0,5 +0,5))

Soit la matrice d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $\det(A-\lambda.I_3)$ le polynôme caractéristique de A.
   En déduire que A admet deux valeurs propres, une simple λ_1, et une double λ_2.

On note E_1 le sous espace propre associé à λ_1 et E_2 le sous espace propre associé à λ_2.

2) Déterminer une base de E_1 et une base de E_2.
   En déduire que A est diagonalisable.
3) Déterminer une matrice inversible P, telle que:
   $P^{-1}.A.P = D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de P et D.

Bon Courage