Ecole Préparatoire en Sciences Economiques, Commerciales, Et Sciences de Gestion.

Module d'Algèbre de $2^{ème}$ Année Le 30/05/2012.

Examen du Second Semestre (Durée : 2h)

Exercice 1 : **9 points**

Soit f l'application linéaire définie de IR^3 dans IR^2 par :

$$f(x, y, z) = (x+y-z, \ 0)$$

1) Déterminer une base et la dimension de ker(f). f est-elle injective ? surjective ?
   On note $B_1 = \{ e_1, e_2 , e_3\}$ la base canonique de IR^3 et $B_2 = \{e'_1, e'_2\}$ celle de IR^2
2) Déterminer $M = M(f, B_1, B_2)$ la matrice associée à f dans les bases B_1 et B_2.

Soient $B_1 = \{ u_1 ,u_2 ,u_3\}$ où $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$
et $B_2=\{ v_1 , v_2 \}$ où $v_1 = (1, 1)$,$v_2 = (1, 2)$.

3) Montrer que B_1' est une base de IR^3 et que B_2' est une base de IR^2.
4) Ecrire la matrice de passage P de B_1 à B_1 (on la note P) et la matrice de passage de B_2 à B_2 (on la note Q).
5) Exprimer (sans faire de calcul) les matrices suivantes en fonction de M, P et Q :
   $M(f, B_1, B_2)$, $M(f, B_1,B_2)$ et $M(f, B_1, B_2)$

Exercice 3 : 9 points

On considère la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire ses valeurs propres .
2) Montrer, sans faire de calcul, que A est diagonalisable sur IR.
3) Déterminer les sous espaces propres associés aux valeurs propres de A.
4) Déterminer une base de IR^3 formée de vecteurs propres et écrire la matrice de f dans cette base.
5) Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul .

Exercice 3 : 6points

Soit g une application de $IR^3 \times IR^3$ dans IR définie comme suit :
Pour tous vecteurs $x= (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$ de IR^3 ,

$$g(x,y) = x_1y_1 -2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - y_2x_3$$

1) Ecrire la matrice de g dans la base canonique de IR^3
2) Déterminer la forme quadratique q associée à g.
3) Réduire q par le procédé de Gauss.

Bon courage