Ecole Préparatoire en Sciences Economiques, Commerciales et Sciences de Gestion

Examen de Probabilités

2ème Année **Durée: (03) Heures** **Draria : 31 /01 /2O12**

Exercice 1:

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0, \\ \frac{2}{18} & si \;\; 0 \leq x < 1, \\ \frac{10}{18} & si \;\; 1 \leq x < 2, \\ \frac{13}{18} & si \;\; 2 \leq x < 3, \\ \frac{16}{18} & si \;\; 3 \leq x < 5, \\ 1 & si \;\; x \geq 5. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction F.
2. F est-elle une fonction de répartition ? Si oui, la variable aléatoire associée est-elle discrète ? Justifiez votre réponse.
3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
   a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Trouver la fonction de masse de la variable aléatoire X.
   c) Calculer les probabilités suivantes :
   $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 3\right)$, $P(-1 < X < 4)$, $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$ et $P(|X| < 1)$.
4. Soit Y une variable aléatoire définie comme suit :
   $Y = 2\,X^2 + 1$.
   a) La variable aléatoire Y est-elle discrète ? Justifiez votre réponse.
   b) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   c) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   d) Calculer les probabilités suivantes :
   $F_Y\,(3.5)$, $F_Y(1.2)$, $F_Y\,(-1)$ et $P(2 \leq Y \leq 15)$.

Exercice 2:

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard 2 boules de l'urne une à une sans remise. Soit X la variable aléatoire qui somme les numéros des boules tirées.

1. Donner l'ensemble fondamental Ω associé à l'expérience aléatoire ci-dessus.
2. Donner les valeurs que peut prendre X et montrer que X est une variable aléatoire sur Ω muni de la σ-algèbre $\mathcal{P}(\Omega)$.
3. Donner la loi de probabilité de X .
4. Calculer la probabilité pour que X ne dépasse pas la valeur 5.
5. Calculer la valeur moyenne de X.
6. Soit la variable aléatoire $Y = (X - 5)^2$.
   a) Donner la loi de probabilité de Y.
   b) Déterminer de deux manières $E(Y)$.
   c) Déterminer la fonction génératrice de Y et en déduire
      $E[Y(Y-1)(Y-2)(Y-3)]$.

Exercice 3:

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X la variable aléatoire qui représente « le nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer les valeurs prises par X, ainsi que sa loi de probabilité.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?
3. L'épicier a 100 clients par jour qui achètent des pommes. Soit Y la variable aléatoire représentant « le nombre de clients par jour qui se plaignent ».
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   b) combien y aura-t-il, en moyenne, de plaintes ?
   c) Peut-on approximer la loi du nombre de plaintes par une loi discrète usuelle ? Si c'est oui, laquelle ? Justifiez votre réponse.
   d) Supposons maintenant que la probabilité qu'une pomme soit avariée est égale à 8%. Déterminer approximativement la probabilité que l'épicier ait 3 plaintes par jour ?

BONNE CHANCE