Ecole Préparatoire en Sciences Economiques, Commerciales et Sciences de Gestion DRARIA

– Alger –

Le 24/02/2011

Examen du Premier Semestre d'Analyse 1ème Année

Durée : 2 Heures

ECRIRE LISIBLEMENT

Exercice 1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right) + x\,Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 3a-1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a , f est-elle continue en 0 ?. *(5 pts)*

Exercice 2

1°) Montrer que la fonction $g \;:\; t \mapsto g(t) = \dfrac{t}{t+1}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ sans utiliser la dérivée *(2 pts)*

2°) En déduire que pour tous réels a et b on a $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$ *(3pts)*

Problème

Partie A

On considère la fonction f de la variable réelle **x,** définie par la relation

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

sur l'intrevalle $A =]-2, +\infty[$. On donne $\sqrt{5} \approx 2{,}236$. On pourra s'aider de dessins

(i) Démontrer, en utilisant la définition, que f est strictement croissante sur A. *(1 pt)*

(ii) Résoudre l'équation $f(x) = x$, (on note α et β les racines de cette équation, $\beta < \alpha$) et calculer les valeurs exactes et des valeurs approchées de α et β. *(0.5 pt)*

(iii) Tracer le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé (unité égale à 4 cm sur les deux axes) en précisant des points remarquables . *(0.5 pt)*

(iv) Démontrer, en utilisant la définition, que la fonction f est continue sur A. *(1 pt)*

Partie B

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ e n posant (f est la fonction de la partie A)

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 \text{ donné dans } A..$$

(i) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $u_0 = \alpha$, et lorsque $u_0 = \beta$. *(1.5 pt)*

Dorénavant on suppose que $\beta < u_0 < \alpha$.

(ii) Calculer u_1 et déterminer le signe de $u_1 - u_0$ et le signe de $\alpha - u_1$ *(0.5 pt).*

(iii) Démontrer que le suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante. *(1.5 pt)*

(iv) Démontrer que le suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée. *(1.5 pt)*

(v) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente (justifications). *(0.5 pts)*

(vi) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers $+\infty$ en justifiant entièrement tous Vos raisonnements. *(1.5pt)*

Si tout ce qui précède a été terminé: *Que peut-on dire de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *si* $u_0 > \alpha$ *(un raisonnement graphique sera accepté, s'il est correct) (1 pt en plus)*

N.B : Il sera tenu compte de la PRESENTATION DES RESULTATS et de LA CLARTE DES RAISONNEMENTS.