

Ecole Préparatoire En Sciences Economiques, Commerciales Et  
Sciences De Gestion de Draria

ANNEE 2010-2011

1ère Année

22 février 2011

durée : 2 heures

EPREUVE D'ALGEBRE DU 1<sup>er</sup> SEMESTRE

**EXERCICE 1 (3 pts)**

Soit  $A$ ,  $B$ , et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$  vérifiant la relation

$$A \cup B \subset B \cap C$$

Démontrer que  $A \subset B \subset C$ .

**EXERCICE 2 (3 pts=1,5+1,5)**

$X$ ,  $Y$ , étant deux parties d'un ensemble  $E$ ;  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les complémentaires de  $X$  et  $Y$ . Simplifier les expressions  $A$  et  $B$  définies par

- a)  $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$

- b)  $B = (X \cup \bar{Y}) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (X \cup Y)$

En précisant toutes les propriétés à utiliser.

**EXERCICE 3 (6 pts=2+3+1)**

Dans  $\mathbb{Z}$ , on définit la relation  $\mathcal{R}$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 7x - 7y)$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .
2. Trouver  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ . Soit  $a \in \mathbb{Z}$ , déterminer la classe  $\bar{a}$  de l'élément  $a$ .
3. Déterminer le graphe de la relation  $\mathcal{R}$  dans le plan.

**EXERCICE 4 (8 pts=1+3+2+2)**

Soient les fonctions  $f$  et  $h$  définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad h(x) = \sin x$$

1.  $f$  est-elle injective ?  $f$  est-elle surjective ?
2. On pose  $E = \mathbb{R}_+ - \{1\}$  et  $F = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$ ; et soit l'application  $g$  définie par

$$g : E \longrightarrow F \\ x \longmapsto g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

- a) Montrer que  $g$  est injective.
  - b) Montrer que  $g$  est surjective.
  - c) En déduire que  $g$  est bijective et déterminer sa réciproque  $g^{-1}$ .
3. Déterminer  $goh$  et  $hog$  en précisant les domaines de définition  $D_{goh}$  et  $D_{hog}$ .
  4. Soient  $I = \{3, 4, 5\}$  et  $J = [2, 5]$ . Déterminer  $g^{-1}(I)$  et  $g(J)$ .  
( Indication : Pour calculer  $g(J)$ , utiliser la monotonie de  $g$  )