Exercice 1 *(06 points)*

Soient $F = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{R}); A = A^T\right\}$, $H = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{R}); A = -A^T\right\}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$.

1. Montrer que F et H sont sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$, en déduire $\dim F$ et $\dim H$.
2. Déterminer $F \cap H$, en déduire $\dim F \cap H$.
3. Est-ce que $\mathcal{M}_2(\mathcal{R}) = F \oplus H$?

Exercice 2 (06 points)

Soit $(\mathcal{S})$: $Ax = b$ un système d'équations linéaires ; où, $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ et $x, b \in \mathcal{R}^n$.
On désigne par $C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_n$ les vecteurs-colonnes de la matrice A et par A_j la matrice obtenue de A, en remplaçant C_j par le vecteur b.

1. Montrer que si $\det(A) \neq 0$ alors, $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \forall j = 1,2,\dots,n$, où, x_j est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur x.

Considérons le système $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2. Ecrire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle.
3. Montrer que le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer.
4. Résoudre $(\mathcal{S})$ par la méthode de Cramer.

Exercice 3 (08 points)

Soient M, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathcal{R})$ définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M^2 + MC - 2I_2 = 0$ où, I_2 désigne la matrice unitaire.
2. Montrer que M est inversible. En déduire M^{-1}, la matrice inverse de M.
3. Calculer les valeurs propres de la matrice $A = M + 2B$, ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice A, est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser A.

Bon courage