2016/2015

الزمن : ساعتان

اختبار الفصل الثاني في الجبر

التمرين الأول (5 نقاط)

لتكن المجموعتان:

$$E=\{(x,y,z,t)\in\Re^4 / x+y-2z+t=0\}$$

و

$$F=\{(x,y,z,t)\in\Re^4 /(x=y)\wedge(2x-z+t=0)\}$$

- بين أن E و F فضاءان شعاعيان جزئيان من الفضاء الشعاعي $\Re^4$ على الحقل $\Re$.
- عين بعد E و بعد F.
- عين المجموعة $E\cap F$ ثم $\dim E\cap F$.
- بين أن : $E\oplus F=\Re^4$.

التمرين الثاني (8 نقاط)

لتكن المصفوفة: $M=\begin{pmatrix}0 & z & -y\\ -z & 0 & x\\ y & -x & 0\end{pmatrix}$ و ليكن الشعاع $U=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

حيث z,y,x أعداد حقيقية تحقق: $x^2+y^2+z^2=1$.

- أحسب: $U'.U$ ، $U.U'$ و $P=I_3+M^2$. (I_3 هي مصفوفة الوحدة من الرتبة 3).
- تأكد أن: $P=U.U^t$ و استنتج أن $P^2=P$.
- بين أن: $P.M=M.P=0$.
- بين أن: $(P-M^2)^n=P+(-1)^n M^{2n} \quad ,\forall n\in N^*$.
- استنتج أن المصفوفة $(-1)^n M^{2n}$ لا تتعلق بالعدد n من N^*.

التمرين الثالث (7 نقاط)

ليكن الفضاء الشعاعي $\Re^3$ على الحقل $\Re$ المزود بالأساس القانوني: $C=\{e_1,e_2,e_3\}$.

و ليكن الأندومورفيزم f المعرف كما يلي:

$$f:\quad \Re^3\to\Re^3$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(y+z\,,x+z\,,x+y)$$

- أوجد المصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس القانوني C. $(A=\mathrm{M}(f,C,C))$.
- لتكن الأشعة: $u_3=(1,1,1),\, u_2=(1,-2,1),\, u_1=(1,0,-1)$

  بين أن: $C'=\{u_1,u_2,u_3\}$ هي أساس لـ $\Re^3$.
- أوجد مصفوفة العبور P من الأساس C نحو الأساس C' و كذا مقلوبها P^{-1}.
- ما هي المصفوفة B المرافقة لـ f في الأساس الجديد C'. $(B=\mathrm{M}(f,C',C'))$.

بالتوفيق