

الامتحان الثاني - المقياس : جبر 1

المستوى : سنة أولى (أ ت م + أ ت ث)

التاريخ : 22 ماي 2014

المدة : ساعتان

التمرين 01 : (3 ن)  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

01.5..... 1. فكك  $f(x)$  إلى مجموع عناصر بسيطة

01.5..... 2. أحسب :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$  ثم يبين أن هذا المجموع يتقارب نحو  $\frac{1}{4}$

التمرين 02 : (5 ن)

$f$  هو الأندومورفيزم لـ  $\mathbb{R}^3$  المعرفة بـ :  $f(x, y, z) = (2x - y, -x + 5y + 3z, x + 4y + 3z)$

01.5..... 1. أحسب  $f(1,0,0)$  و  $f(0,1,0)$  ثم بين أن هذين الشعاعين مستقلان خطيا

01.5..... 2. جد  $\ker f$  وبين أن  $\dim \ker f = 1$

0.75..... هل  $f$  متباين ؟ هل هو غامر ؟

0.75..... 3. استنتج  $\dim \text{Im } f$  و  $\text{rang } f$

0.50..... أعط أساسا لـ  $\text{Im } f$

التمرين 03 : (12 ن)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$

01.5..... 1. احسب  $A^2$  ثم بين أن  $A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}I = 0$

حيث  $I$  هي مصفوفة الوحدة للحلقة  $M_2(\mathbb{R})$ .

01.5..... 2. استنتج أن  $A$  قابلة للقلب و أن  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

3. باستعمال  $A^{-1}$  حل في  $\mathbb{R}^2$  الجملة (S) التالية :

01.5.....  $S : \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ -x + \frac{5}{2}y = 4 \end{cases}$

01.5..... حل نفس الجملة (S) أعلاه بطريقة كرامر

5. جد باقي القسمة الاقليدية لكثير الحدود  $X^n$  على كثير الحدود  $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$

02..... من أجل  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

01..... 6. استنتج أن  $A^n = \begin{pmatrix} -3 + \frac{2}{2^{n-1}} & 3\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ -2 + \frac{1}{2^{n-1}} & 4 - \frac{3}{2^n} \end{pmatrix}$

7.  $(x_n)$  و  $(y_n)$  متاليتان عدديتان معرفتان بحديهما الأولين  $x_0$  و  $y_0$  و بالعلاقتين التراجعتين

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -x_n + \frac{5}{2}y_n \end{cases} \quad \text{التاليتين :}$$

• بوضع :  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

01.5..... أ. برهن بالتراجع أن :  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0$

01..... ثم اكتب الحدين العامين  $x_n$  و  $y_n$  بدلالة  $x_0$  و  $y_0$  و  $n$

0.5..... ب. بين أن :  $\lim x_n = -3x_0 + 6y_0$  و  $\lim y_n = -2x_0 + 4y_0$