

الامتحان الأول في ر112 (تحليل 1)

التمرين 01

1. لتكن D المجموعة المعرفة بـ: $D = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n, n \in \mathbb{N} \right\}$
أثبت أن المجموعة D محدودة، ثم عين مجموعة الحواد العليا، الحواد الدنيا، الحد الأعلى، الحد الأدنى، أكبر عنصر وأصغر عنصر (إن وجدت).
2. لتكن A و B مجموعتين من \mathbb{R} بحيث: $A \subseteq B$ ، و B محدودة.
 - أ. أثبت أن $\sup A \leq \sup B$
 - ب. أثبت أن $\inf A \geq \inf B$

التمرين 02

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n + 2(n^2 + n - 1)}{(n+1)^2}, n \geq 1 \end{cases}$$

1. أدرس اشارة الفرق $2 - u_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

2. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3. أثبت أنها متقاربة نحو نهاية l .

4. أحسب l .

$$u_n = \frac{n+1}{2n!} + 2$$

— 5. عبر عن u_n بدلالة n .

التمرين 03

-I ليكن f تابعاً معرفاً من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

والتابع g معرف بـ: $g(x) = x^2(x-1)f(x)$ على \mathbb{R} .

1. أثبت أن g مستمر عند $a = 0$ و $a = 1$.

2. أثبت أن g غير مستمر عند كل نقطة $a \notin \{0, 1\}$.

3. أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ موجودة، واحسبها.

-II أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = 0$$

-III- ليكن $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$. أثبت أن له نقطة صامدة في $[a, b]$.

بالتوقيق / أساتذة المادة

سلم التنقيط:

التمرين الأول: 2.5+2.5

التمرين الثاني: 1.5+1+1+0.5+1

التمرين الثالث: 3+1+2+1+1+2