Chapitre 6 : Tests d'hypothèses

1. Principes des tests

Lors de l'étude de certains phénomènes notre préoccupation peut consister en la vérification de certaines hypothèses. Le principe général d'un test d'hypothèse peut s'énoncer comme suit :

- On étudie une population dont les éléments possèdent un caractère (mesurable ou qualitatif)
  - Un paramètre mesurable est associé à ce caractère
  - la valeur de ce paramètre est inconnue.
- Une hypothèse est formulée sur la valeur du paramètre : cette formulation résulte de considérations théoriques, pratiques ou encore elle est simplement basée sur un pressentiment.
- On veut porter un jugement sur la base des résultats d'un échantillon prélevé de cette population. Nous avons donc à notre disposition, des observations sur lesquelles le hasard, parmi les facteurs possibles, a agi. **Nous est-il possible malgré cela de vérifier nos hypothèses ?**

Pour décider si l'hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permettra de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue dans l'échantillon et celle du paramètre spécifié dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage.

En gros, il s'agit d'émettre des conclusions sur l'ensemble de la population à partir de calculs réalisés sur des données observées.

I. DÉFINITION DES CONCEPTS UTILES A L'ÉLABORATION DES TESTS D'HYPOTHÈSE

Hypothèse statistique

Une hypothèse statistique est un énoncé (une affirmation) concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, distribution des observations) d'une population.

Test d'hypothèse

Un test d'hypothèse (ou test statistique) est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillon, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques.

Hypothèse nulle (H0) et hypothèse alternative (H1)

L'hypothèse selon laquelle on fixe à priori un paramètre de la population à une valeur particulière s'appelle l'hypothèse nulle et est notée H0. N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse H0 s'appelle l'hypothèse alternative (ou contre-hypothèse) et est notée H1. C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie.

II. Prise de décision

Dans la démarche adoptée, nous allons établir des règles de décision qui vont nous conduire à l'acceptation ou au rejet de l'hypothèse nulle H0. Toutefois cette décision est fondée sur une information partielle, les résultats d'un échantillon. Il est donc statistiquement impossible de prendre la bonne décision à coup sûr. En pratique, on met en œuvre une stratégie qui nous permettrait, à long terme de rejeter à tort une hypothèse nulle vraie dans une faible proportion de cas. La conclusion qui sera déduite des résultats de l'échantillon aura un caractère probabiliste : on ne pourra prendre une décision qu'en ayant conscience qu'il y a un certain risque qu'elle soit erronée. Ce risque nous est donné par le seuil de signification du test.

Seuil de signification du test

Le risque, consenti à l'avance et que nous notons α de rejeter à tort l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie, s'appelle le seuil de signification du test et s'énonce en probabilité ainsi **:**

$$\alpha = P(\text{rejeter } H0 / H0 \text{ vraie})$$

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique une région de rejet de l'hypothèse nulle (appelée également région critique). L'aire de cette région correspond à la probabilité α. Si par exemple, on choisit $\alpha = 0{,}05$, cela signifie que l'on admet d'avance que la variable d'échantillonnage peut prendre, dans 5% des cas, une valeur se situant dans la zone de rejet de H0, bien que H0 soit vraie et ceci uniquement d'après le hasard de l'échantillonnage. Sur la distribution d'échantillonnage correspondra aussi une région complémentaire, dite région d'acceptation de H0 (ou région de non-rejet) de probabilité $1-\alpha$.

Remarques :

Les seuils de signification les plus utilisés sont $\alpha = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$, dépendant des conséquences de rejeter à tort l'hypothèse H0.

III. Stratégie

Différentes étapes doivent être suivies pour tester une hypothèse :

1. définir l'hypothèse nulle (notée H0) à contrôler,
2. choisir un test statistique ou une statistique pour contrôler H0,
3. définir la distribution de la statistique sous l'hypothèse « H0 est réalisée »,
4. définir le niveau de signification du test ou région critique notée α,
5. calculer, à partir des données fournies par l'échantillon, la valeur de la statistique
6. prendre une décision concernant l'hypothèse posée et faire une interprétation

Exemple simple

Un examinateur doit faire passer une épreuve type QCM à des étudiants. Ce QCM est constitué de 20 questions indépendantes. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles dont une seule correcte. On suppose qu'il y a deux types d'étudiants :

- l'étudiant qui n'a pas travaillé et qui répond au hasard : il a alors une chance sur trois d'avoir une réponse juste.

- l'étudiant qui a travaillé : il a davantage de chance de donner une bonne réponse à chaque question mais le pourcentage de réussite est inconnu.

L'examinateur veut déterminer une valeur critique kc telle que :

- si le nombre de réponses correctes est supérieur ou égal à kc , l'étudiant est reçu.

- si le nombre de réponses correctes est strictement inférieur à kc , l'étudiant est recalé.

On considère la variable aléatoire X égale au nombre de réponses correctes parmi les 20 pour un étudiant choisi au hasard. X suit la loi binomiale B (20 ; p) avec

***p* : probabilité de réussite d'un étudiant**.

On s'intéresse aux étudiants qui n'ont pas travaillé. On a alors *p*=1/3.

A l'issue d'un test, 4 cas sont possibles :

(1) l'étudiant n'a pas travaillé et il est recalé   (2) l'étudiant a travaillé et il est reçu

(3) l'étudiant n'a pas travaillé et il est reçu   (4) l'étudiant a travaillé et il est recalé

On a donc 2 risques d'erreur correspondant aux cas (3) et (4) :

- l'erreur α (dite erreur de première espèce) : on pense que l'étudiant a travaillé, on rejette donc l'hypothèse de départ (à savoir qu'il n'a pas travaillé) alors qu'elle est vraie.

- l'erreur β (dite erreur de seconde espèce) : on pense que l'étudiant n'a pas travaillé, on accepte donc l'hypothèse de départ alors qu'elle est fausse.

Pour cela, on va construire un test d'hypothèse.

Construction du test

Choix des hypothèses :

Hypothèse de départ (dite hypothèse nulle H0) : l'étudiant n'a pas travaillé. On a donc p= 1/3 et X suit la loi binomiale B(20;13).

Hypothèse alternative (notée H1) : l'étudiant a travaillé. On a alors p > 1/3.

Détermination de la région critique : l'intervalle [kc ; 20] (trop de réponses correctes, ce qui amènera à refuser l'hypothèse de départ.)

Erreur de 1ère espèce : α = P (X ≥ kc / p = 1/3)

si on choisit un risque de α≃0,09 soit 9%. Alors kc=10. Par contre si on fixe α =0,01, alors kc = 12

Enoncé de la règle de décision :

On choisit un étudiant au hasard.

- si, à son test, avec un risque consenti α il a au moins kc réponses correctes, alors on rejette l'hypothèse H0, et on le déclare reçu.