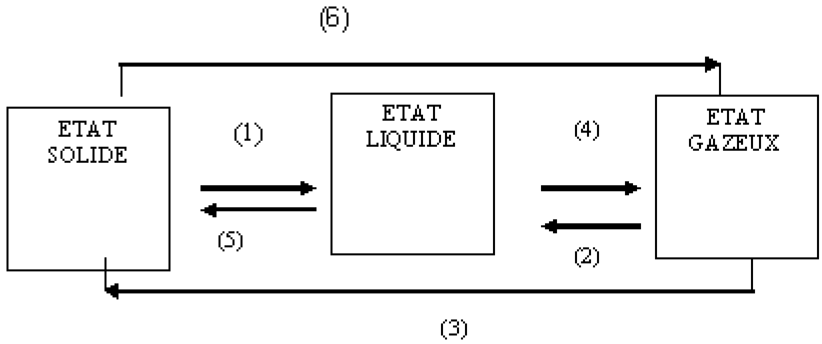
Chapitre 1

MECANIQUE DES FLUIDES

A. INTRODUCTION:

La matière est constituée d'atomes, de molécules ou des ions. Ces particules sont liées entre elles par des forces de liaison (liaisons covalentes, ioniques, métalliques, de Van der Waals ou d'hydrogène). Selon la grandeur de la force liant ces constituants entre eux, on distingue trois états de matière : l'état solide (liaisons très fortes), l'état liquide (forces de liaison moyennes) et l'état gazeux(forces très faibles).

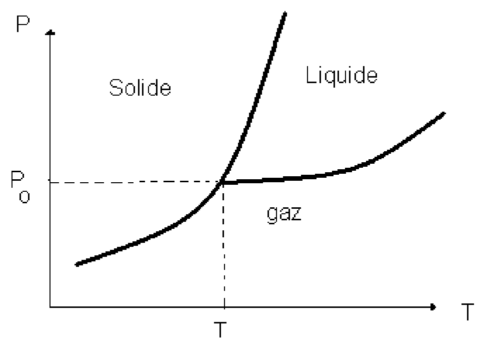


Les transformations de phase ou changements d'états sont :

(1) - Fusion : C'est la transformation de la matière de l'état solide à l'état liquide.
(2) - Liquéfaction (condensation) : C'est la transformation de l'état gazeux à l'état liquide.
(3) - Solidification (condensation ou déposition): C'est le passage de l'état gazeux à l'état solide.
(4) - Gazéification (vaporisation) : C'est la transformation d'un liquide en vapeur.
(5) - Solidification : C'est l'inverse de la fusion .On l'appelle aussi congélation lorsque la transformation se réalise à basses températures).
(6) - Sublimation : C'est le passage de l'état solide à l'état gazeux.

Les transformations 1, 4 et 6 se font avec absorption d'énergie par contre, les transformations 2,5 et 3 s'accompagnent d'un dégagement de chaleur.

L'eau, par exemple, à T_0 = 273 K et P_0 = 1 atmosphère (1 atm.) , se trouve sous 3 états (les 3 phases solide, liquide et gazeuse sont présentes).C'est le point triple de l'eau dans le diagramme (P, T).



T est le point triple de l'eau :

T_0 = 273K, P_0= 1 atm.

Les fluides sont des corps (liquides et gaz) qui, n'ayant pas de forme propre, sont facilement déformables sous l'action de très faibles contraintes
(forces) extérieures. La mécanique des fluides se compose de l'étude des fluides au repos (hydrostatique) et des fluides en mouvement (hydrodynamique). Les applications de la mécanique des fluides sont très importantes notamment dans la marine, l'océanographie, la météorologie, la médecine, …etc.
Une masse donnée d'un fluide ne garde pas une forme bien déterminée (comme dans le cas des solides) mais varie avec la forme du vase dans lequel elle se trouve. Pour cela, les notions de masse et de force utilisées en mécanique newtonienne seront substituées respectivement aux notions de masse volumique et de pression.

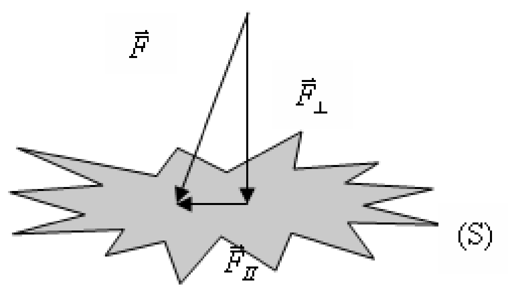
B. HYDROSTATIQUE

1. Définition :

Les fluides ne sont pas rigides et ne peuvent pas rester longtemps au repos sous l'action de forces extérieures. Un fluide est au repos seulement lorsqu'il n'existe pas de forces parallèles appliquées sur lui. Toute force exercée sur ou par un fluide doit être perpendiculaire à la surface sur laquelle il agira.

Soit (S) une surface plane d'un fluide. On exerce sur elle une force quelconque $\vec{F}$.

Cette force peut être décomposée en une somme vectorielle : une force perpendiculaire $\vec{F}_\perp$ à la surface (S) et une force parallèle à cette surface $\vec{F}_{II}$ telles que $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_{II}$.



Lorsque $\overrightarrow{F_{II}} \neq \vec{0}$, l'écoulement du fluide aura bien lieu.
Lorsque $\overrightarrow{F_{II}} = \vec{0}$ ($\vec{F} = \overrightarrow{F_\perp}$), la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la surface (S) et le fluide se trouve alors au repos. Donc, le déplacement d'un fluide est conditionné par l'existence d'une force parallèle appliquée sur sa surface.

1. Pression

La pression est la force qui s'exerce par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S}$$

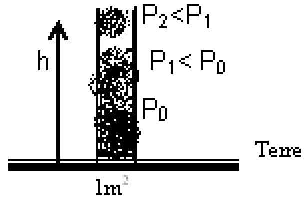
où F est la force s'exerçant perpendiculairement à la surface et S est l'aire sur laquelle la force $\vec{F}$ est appliquée.

$[P] = ML^{-1}T^{-2}$
1 Pascal =1 Pa =1 kg/ms^2 = 1 N/m^2.

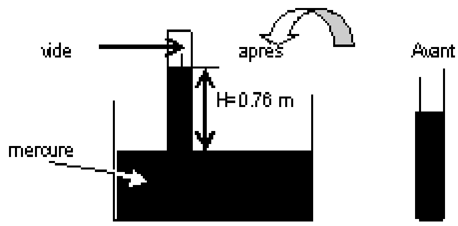
Pression atmosphérique :

La pression atmosphérique est le poids de l'air exercé sur 1 m^2 de la surface de la Terre. Plus on s'éloigne de la surface de la Terre , plus il y a moins de molécules d'air. Donc la pression diminue avec l'altitude h.

A T= 0°C et au niveau de la mer (h = 0 m)
on a P_0 =1 atmosphère
= 1 atm. = 1.013 10^5 N/m^2
= 1.013 10^5 Pa =1.013 bar =760 mm.Hg
=760 Torrs .



Lorsqu'on remplit un tube avec du mercure, ensuite on le plonge) dans un vase rempli du mercure, ce dernier descend jusqu'à la hauteur H = 0.76 m = 760 mm, et dans la partie supérieure de ce tube la pression est nulle (il n'y a pas d'air).



En répétant la même expérience avec un vase plein d'eau, la hauteur d'ascension sera de 10.1 m. Plus la densité du liquide utilisé est petite, plus la hauteur de la colonne est importante. C'est pour cela que, de point de vue pratique, dans la plupart des appareils de mesure de la pression on utilise le mercure (de densité très grande (13.6)). Voir baromètre à mercure (page 6).

Exemple :

Evaluer la masse de l'atmosphère algérienne lorsque S = 2.38 10^6 km^2 et g = 10 m/s^2.

$$P_0 = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} \Rightarrow m = \frac{P_0 S}{g} = 1.01310^5 x 2.3810^{11} = 2.3810^{16} kg.$$

2. Poussée d'Archimède :

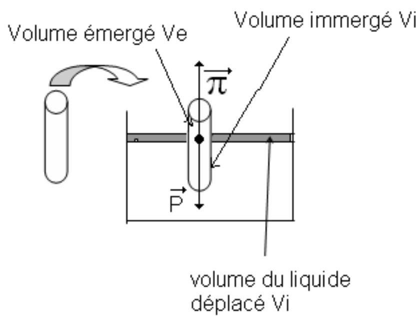
Lorsque un corps solide est plongé dans un fluide, il reçoit une poussée (force) verticale , dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé.

On a :

Le poids du corps est : $P = \rho V g = \rho(V_i + V_e)$.

La poussée d'Archimède est $\pi = V_i g \rho_0$.

Où ρ est la masse volumique du corps et ρ_0 celle du fluide, V_i est le volume immergé, V_e est le volume émergé.



A l'équilibre on a :

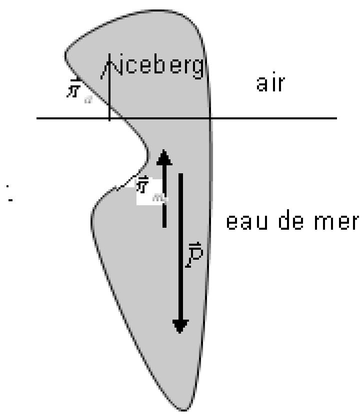
$$\pi = P \Rightarrow \rho V = \rho_0 V_i \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_i}{V_i + V_e} .$$

Selon les valeurs de ρ et ρ_0 on distingue les phénomènes suivants:

- Lorsque $\rho \rangle \rho_0$ on a une immersion : le corps solide se trouve complètement immergé dans le fluide.
- Lorsque $\rho \langle \rho_0$ on a une flottaison : le corps solide flotte à la surface du liquide (une partie se trouve dans le fluide et l'autre dans l'air).
- Lorsque $\rho \approx \rho_0$ on a une suspension (cas de certains médicaments : sirops).

Exemple :

Les masses volumiques de la glace, de l'eau de mer et de l'air sont respectivement 920 kg/m^3, 1025 kg/m^3 et 10^{-3} kg/m^3.Calculer la fraction $\frac{V_e}{V_i}$ (volume émergé /volume immergé) d'un iceberg



On a : le poids de l'iceberg est

$$P = \rho_g gV = \rho_g (V_i + V_e) g$$

La poussée d'Archimède dans l'eau de mer est :

$$\pi_m = \rho_m g V_i$$

La poussée d'Archimède dans l'air est :

$$\pi_a = \rho_a g V_e \ .$$

A l'équilibre : $\vec{P} = \overrightarrow{\pi_a} + \overrightarrow{\pi_m}$.

$$\Rightarrow \rho_g gV = \rho_a g V_e + \rho_m g V_i$$

$$\Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) g = \rho_a g V_e + \rho_m g V_i$$

$$\Rightarrow \rho_g (V_i + V_e) = \rho_a V_e + \rho_m V_i$$

$$\Rightarrow V_e(\rho_g - \rho_a) = V_i(\rho_m - \rho_g)$$

$$\Rightarrow \frac{V_e}{V_i} = \frac{\rho_m - \rho_g}{\rho_g - \rho_a} = \frac{1025 - 920}{920 - 0.001}$$

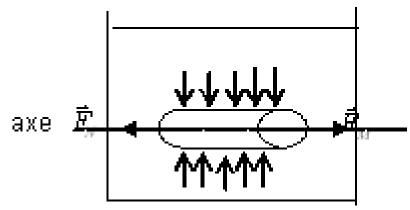
Comme $\rho_a \langle\langle \rho_g \Rightarrow \frac{V_i}{V} = \frac{920}{1025} = 0.9 = 90\%$.

Donc 90% du volume de la glace se trouvent dans l'eau.

3. Loi de Pascal

En absence de gravité la pression dans un fluide au repos est la même en tout point.

Au repos la somme vectorielle de toutes les forces perpendiculaires à la surface latérale du cylindre est nulle :



$$\sum \vec{F}_{\perp cylindre} = \vec{0}$$

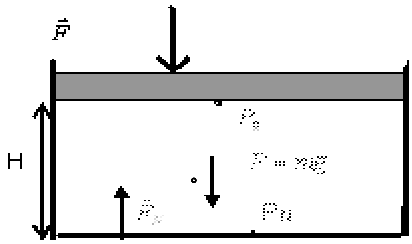
De même , la résultante des forces parallèles à l'axe du cylindre est égale à $\vec{0}$.

$\sum \vec{F}_{\perp}(axe) = \vec{0}$ car , en raison de symétrie, pour chaque force appliquée perpendiculairement à l'axe, il existe une force qui lui est égale en module, mais du sens opposé, de sorte que la somme vectorielle est égale à $\vec{0}$.

$$\sum \vec{F}_{II(axe)} = \vec{F}_M + \vec{F}_N = \vec{0} \Rightarrow \left\|\vec{F}_M\right\| = \left\|\vec{F}_N\right\| \Rightarrow \frac{F_M}{S} = \frac{F_N}{S} \Rightarrow P_M = P_N \ .$$

S est la section droite du cylindre.

3. Pression hydrostatique



Soit un cylindre contenant un fluide. Soit $\vec{F}$ une force perpendiculaire au piston de section S et de masse négligeable. La pression sous le piston est : P_0

$$P_0 = \frac{F}{S}$$

où S est la section du piston.

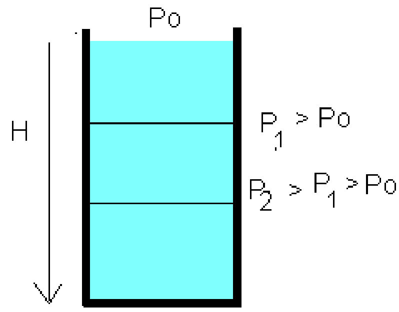
L'équilibre du fluide se traduit par :

$$\vec{F}_N + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_N = -(\vec{P} + \vec{F})$$

La force totale exercée par le fluide sur le fond du cylindre est :

$$\vec{R}_N = -\vec{F}_N = (\vec{P} + \vec{F}) \Rightarrow P_H = \frac{R_N}{S} = \frac{P}{S} + \frac{F}{S} = \frac{\rho g V}{S} + P_0$$

$$\Rightarrow P_H = \frac{\rho g H S}{S} + P_0 \Rightarrow P_H = \rho g H + P_0 .$$



Donc la pression dans un fluide augmente avec la profondeur.

Loi : La pression dans un fluide au repos est la même en tout point situé sur une même horizontale.

La pression à la profondeur H est donnée par :

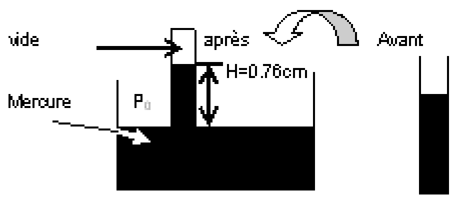
$$P_H = \rho g H + P_0$$

Lorsque H est constant, la pression à cette profondeur est constante.

6. Appareils de mesure de la pression

a. **Baromètre** : Le baromètre est un appareil de mesure de la pression atmosphérique P_0.

Ex. Baromètre à mercure :



La pression à la surface du mercure est égale à la pression atmosphérique P_0. Comme le fluide est au repos, la pression aux points situés sur la même horizontale que cette surface est égale aussi à P_0 (même pour les points situés à l'intérieur du tube). La pression dans la partie supérieure du tube est nulle. Donc, en appliquant la loi de la pression hydrostatique on trouve :

$$P_0 = 0 + \rho g H = 1360x9.81x0.76 = 1.01310^5\, Pa.$$

Avec : $\rho = 1360 kg/m^3$ est la masse volumique du mercure.

$g = 9.81 m/s^2$ est l'accélération de la pesanteur.

$H = 0.76 m$ est la colonne du mercure dans le tube.

b. **Manomètre** :

Il mesure la différence entre la pression absolue P dans le fluide et la pression atmosphérique P_0. Il est constitué d'un tube en U dans lequel se trouve une certaine quantité du mercure. Une branche de ce tube est introduite dans un réservoir contenant un fluide (gaz ou liquide) pour lequel on veut mesurer la pression P. L'autre branche est à la pression atmosphérique P_0. Le manomètre nous donne directement la différence de ces deux pressions :

$\overline{P} = P - P_0$.

Cette différence de pressions est souvent appelée pression de jauge.

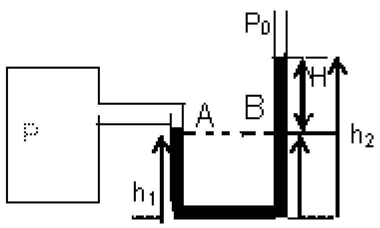
Les points à l'intérieur du tube, se trouvant sur la même horizontale que le point A, sont à la même pression.

On a : $P + \rho g h_1 = P_0 + \rho g h_2$

$\Rightarrow \quad P = P_0 + \rho g (h_2 - h_1)$

$\Rightarrow \quad P = P_0 + \rho g H$

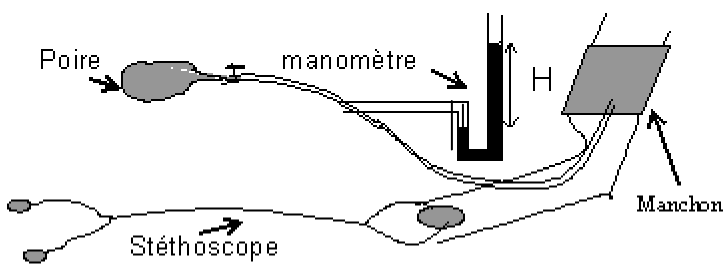
$\Rightarrow \quad \overline{P} = P - P_0 = \rho g H$



c.Sphygmomanomètre (Tensiomètre)

Il est constitué d'un manomètre et d'un stéthoscope. Il sert à mesurer la tension (pression) artérielle. Pendant le cycle cardiaque la pression dans le cœur passe par un maximum (pompage) et un minimum (relaxation c'est à dire que le cœur est plein du sang).

La pression maximale est la pression *systolique* tandis que la pression minimale est dite pression *diastolique*.



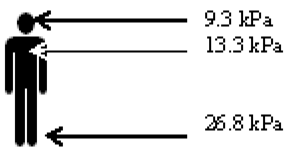
Généralement on mesure la tension artérielle au niveau du bras car il contient un seul os (humérus), ce qui n'empêche pas de comprimer à volonté l'artère humérale. L'autre raison de ce choix est le fait que le bras et le cœur se trouvent sur la même horizontale. En comprimant le bras, la pression dans l'artère humérale (située au niveau du bras) augmente

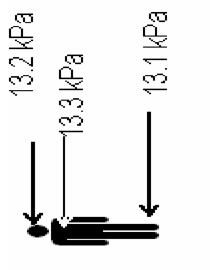
jusqu'à une certaine valeur qui déclenche sa fermeture. Ensuite, on fait diminuer lentement la pression et lorsque sa valeur sera légèrement inférieure à celle du cœur(pression systolique) l'artère s'ouvre brièvement et on entend un écoulement turbulent du sang.
Pour un adulte au repos et en bonne santé :

$$\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \approx \frac{16}{11} kPa.$$

A partir du $\frac{19}{12} kPa$, on dit que le sujet est hypertonique(hypertension).

Les pressions mesurées aux niveaux du cerveau, du cœur et des pieds d'un sujet en position droite sont respectivement 9.3 ; 13.3 et 26.8 kPa. Lorsque le sujet est en position allongée les pressions mesurées sont 13.2 kPa (cerveau), 13.3 kPa (cœur) et 13.1 (pieds).





7. Equation fondamentale de des fluides la statique

Soient P et ρ la pression et la masse volumique en un point $M(x, y, z)$ du fluide et F_x, F_y et F_z , les composantes de la force de volume (force par unité de masse) de ce fluide.
L'équation fondamentale de la statique des fluides s'écrit comme suit:

$$\rho\vec{F} - \overrightarrow{grad}P = \vec{0}$$

ou bien : $\begin{cases} \rho F_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \rho F_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho F_Z - \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$

Démonstration :

Soit un petit cylindre d'axe parallèle à (Oz), de section dS et de masse dm .
Le petit cylindre est en équilibre lorsque la somme vectorielle de toutes les forces qui s'exercent sur ses surfaces est égale à $\vec{0}$ ($\sum \vec{F} = \vec{0}$).
Par exemple suivant l'axe (Oz), on a :

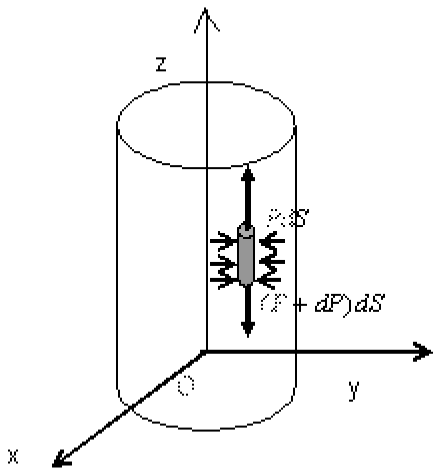
$$PdS - (P + dP)dS + F_z dm = 0$$

$$\Rightarrow PdS - (P + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dS + F_z dm = 0$$

$$\Rightarrow PdS - PdS - \frac{\partial P}{\partial z}dzdS + F_z dm = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z}dzdS + F_z \rho dSdz = 0$$

$$\Rightarrow (-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho F_z)dzdS = 0$$



Comme $dz.dS \neq 0$, on a $\rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$

PdS et $(P + dP)dS$ sont les forces de pression exercées sur la base supérieure et la base inférieure respectivement. $F_z dm$ est la force de volume ou bien la force gravitationnelle exercée dans la direction (Oz).

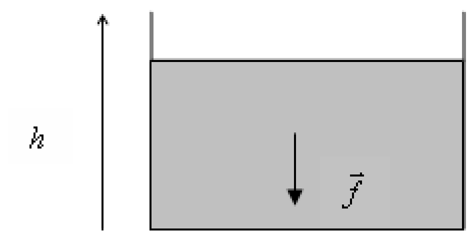
Les expressions $\rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ s'obtiennent de la même façon en changeant uniquement l'orientation du petit cylindre (selon (Ox) et (Oy)).

Lorsque $\vec{F}$ dérive d'un potentiel U (par exemple le cas où $\vec{F}$ représente le poids du fluide dans le petit cylindre), on peut écrire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \rho\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho\dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

8.<u>Fluide incompressible (ρ =constante) dans un champ gravitationnel</u> :



Soit un fluide qui se trouve dans les conditions suivantes :

- Masse volumique constante (ρ=constante)
- Température constante
- Force par unité de masse constante ($\vec{g}$= constante).

On a : $\vec{f} = m\vec{g}$ est la force totale de volume (poids du fluide). La force par unité de masse est donc: $\vec{F} = \frac{\vec{f}}{m} = \vec{g}$. Comme l'énergie potentielle est $E_P = mgh$, l'énergie potentielle par unité de masse sera alors : $U = \frac{E_P}{m} = gh$.

Donc, en remplaçant U par gh dans les expressions de l'équation fondamentale de la statique des fluides on obtient (suivant l'axe (Ox) :

$$\rho \frac{\partial (gh)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 .$$

Comme ρ est constante, on peut écrire :

$$\frac{\partial (\rho gh)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 .$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho gh + P) = 0$$

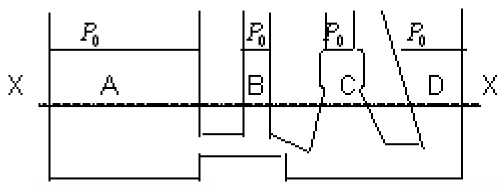
Finalement :

$$\rho gh + P = Cons\tan te$$

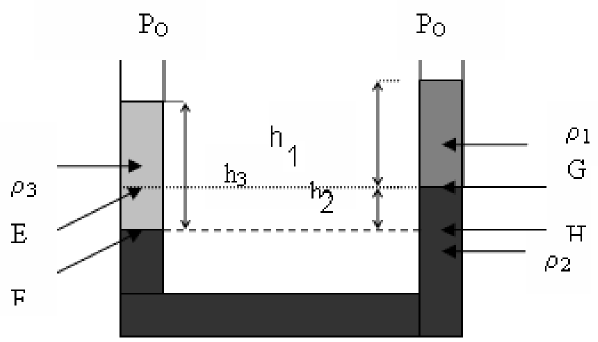
9.Applications

a. Vases communicants

La surface libre d'un fluide est horizontale quelles que soient la section et la forme géométrique du vase qui le contient .Tous les points de la surface libre sont à la même pression P_0 , et ceux se trouvant sur la même horizontale (par exemple sur(XX')), le sont aussi. C'est à dire $P_A = P_B = P_C = P_D$



Dans le cas où le vase contient plusieurs liquides non miscibles, de différentes masses volumiques, les points se trouvant sur une même horizontale ne peuvent pas être à la même pression s'ils n'appartiennent pas à un même liquide. Soit, par exemple un tube en U dans lequel se trouvent 3 liquides de masses volumiques ρ_1,ρ_2 et ρ_3 . Les hauteurs des colonnes de ces fluides dans le tube sont respectivement h_1, h_2 et h_3 .



Les points H et F sont dans le même liquide et sur une même horizontale, donc les pressions en ces points sont égales ($P_F = P_H$) . Les points E et G sont sur une même horizontale mais pas dans le même liquide et les pressions en ces points sont différentes ($P_G \neq P_E$) .

Comme $P_F = P_0 + \rho_3 g h_3$ et $P_H = P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$, on obtient :

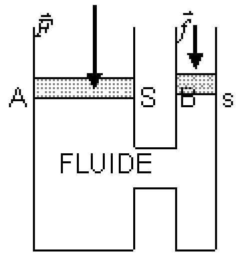
$$\rho_3 h_3 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

b. Presse hydraulique :

Elle est constituée de 2 cylindres communicants de sections S et s . A l'équilibre, les pressions sous les pistons sont égales car les points A et B sont situés sur une même horizontale. Lorsqu'on exerce une petite force sur le piston de section s , le piston de section S s'élève . Donc, la presse hydraulique est utilisée pour soulever des charges lourdes.

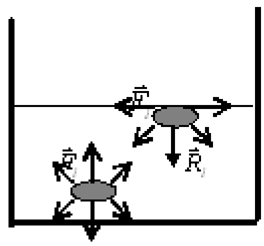
On a à l'équilibre :

$$P_A = P_B \Rightarrow \frac{F}{S} = \frac{f}{s} \Rightarrow F = S\frac{f}{s}$$

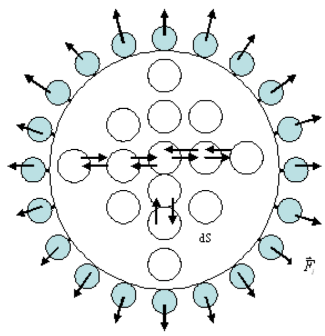


10 . Tension superficielle :

Les phénomènes naturels comme l'ascension de la sève jusqu'aux sommets des arbres, la forme courbée de la surface libre d'un liquide dans un tube, ….etc ne peuvent pas s"expliquer sans l'existence de force exercées par les molécules de la couche superficielle sur des surfaces solides.



Dans un liquide chaque molécule est soumise à des actions des molécules voisines de sorte que leur résultante soit nulle $(\sum_i \vec{F}i = \vec{0})$. Cependant, sur la surface d'un liquide, les molécules subissent, par suite des forces de Van der Waals, des actions dissymétriques dont le résultante est dirigée vers l'intérieur du liquide (vers le bas). Cet effet de surface ou de tension superficielle est donc une manifestation macroscopique des forces de cohésion intermoléculaires.



On a :

Dans le liquide : $\sum_i \vec{F}i = \vec{0}$.

A la surface du liquide : $\sum_i \vec{F}i = \vec{R}i \neq \vec{0}$.

Si S est la surface de la couche, on définit la pression superficielle par :

$$P_S = \frac{\sum_i \vec{R}_i}{S}$$

Où $\sum_i \vec{R}i$ est la résultante des forces exercées sur les molécules de surface, P_S est la pression avec laquelle la couche superficielle agit sur le reste du liquide.

Soit dS un élément circulaire imaginé de la couche superficielle. Les forces $\vec{F}i$ agissant sur les molécules situées sur le contour ne sont pas équilibrées et elles sont perpendiculaires à la frontière dans le plan tangent à la surface du liquide.
Ces forces font tendre la pellicule (film ou couche) et sont appelées forces de tension superficielle.

Soit $\vec{F} = \sum_i \vec{F}i$ la résultante des forces agissant sur le contour de longueur L.

On définit le coefficient de tension superficielle par : $\sigma = \dfrac{F}{L}$

$[\sigma]$= MT^{-1} $\Rightarrow$ 1 N/m^2 =1 kg/s^2

Quelques valeurs de σ à T= 0°C.

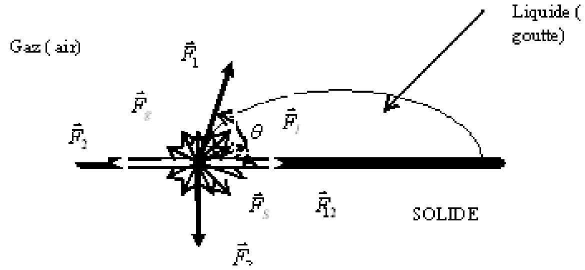
Substances	Tension superficielle σ en N/m
Eau	75 10^{-3}
Mercure	500 10^{-3}
Huile	33 10^{-3}
Alcool	22 10^{-3}

Remarque : La tension superficielle diminue avec l'augmentation de la température. Pour l'eau σ est nulle au point triple.

11.Mouillabilité :

Les solides peuvent être mouillés par certains liquides. Soient trois milieux (liquide, solide et gazeux) et les forces exercées par les molécules à la frontière de séparation de ces 3 milieux.

Les forces $\vec{F}_g, \vec{F}_S$ et $\vec{F}_l$ peuvent être décomposées en :



- $\vec{F}_1$ est tangente à la surface de la goutte.
- $\vec{F}_2$ est portée par la surface de séparation gaz- solide.
- $\vec{F}_{12}$ est portée par la surface de séparation solide- liquide.
- $\vec{F}_3$ est perpendiculaire à la surface du solide.

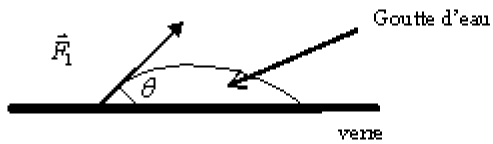
A l'équilibre on a : $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F_2 + F_{12} + F_1 \cos\theta = 0 \\ -F_3 + F_1 \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_3 = F_1 \sin\theta \\ F_2 = F_1 \cos\theta + F_{12} \end{cases}$$

Où θ représente l'angle de raccordement (l'angle entre la force $\vec{F}_1$ et la surface du solide).

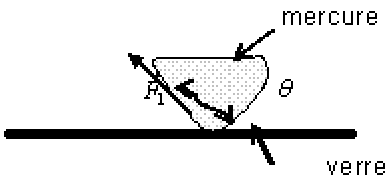
-Lorsque le solide est mouillé par le liquide (ce liquide est dit mouillant), l'angle de raccordement est inférieur à $\pi / 2$ ($\theta < \pi / 2$).

Exemple : l'eau mouille le verre.



- Lorsque le liquide ne mouille pas le solide (le liquide est dit non mouillant) , l'angle de raccordement est supérieur à $\pi / 2$ ($\theta \rangle \frac{\pi}{2}$) .

Exemple : le mercure ne mouille pas le verre.

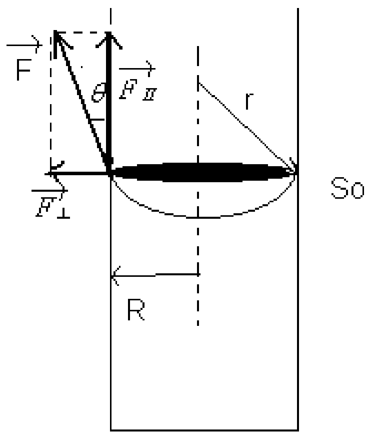


12 – Phénomènes capillaires :

Les forces de tension superficielle (force de pression complémentaire) exercées sur un liquide tendent à modifier sa surface (la surface du liquide n'est pas plane mais courbée).

Soit un liquide contenu dans un tube (capillaire) de section S_0 .

Soient R et r les rayons du capillaire et de courbure de la surface S respectivement. En raison de symétrie, la résultante des forces $\vec{F}_\perp$ le long du contour (perpendiculaires à la paroi du tube) est nulle. Les forces $\vec{F}_{II}$, dirigées parallèlement à la paroi, ont une résultante non nulle $\vec{F}_0$ perpendiculaire à S_0 .

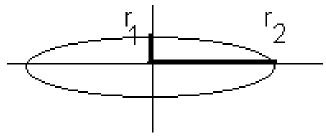


Donc : $\sum_{contour} \vec{F}_\perp = \vec{0}$ et $\sum_{contour} \vec{F}_{II} = \vec{F}_0$. Dans le cas considéré la force $\vec{F}_0$ est dirigée vers le bas.

On a : $F_0 = \sum F_{II} = \sigma \cos(\theta)(2\pi R) = 2\pi R \sigma \cos\theta$ où $2\pi R$ est le contour (périmètre) du capillaire de rayon R . Comme les rayons du tube et de courbure sont reliés par la relation $R = r\cos\theta$, on obtient : $F_0 = 2\pi r \sigma \cos^2 \theta$.

La pression complémentaire exercée par les forces de tension superficielle qui provoquent la courbure de la surface est :

$$\Delta P = \frac{F_0}{S_0} = \frac{2\pi r\sigma\cos^2\theta}{\pi R^2} = \frac{2\pi r\sigma\cos^2\theta}{\pi r^2\cos^2\theta} = \frac{2\sigma}{r}$$

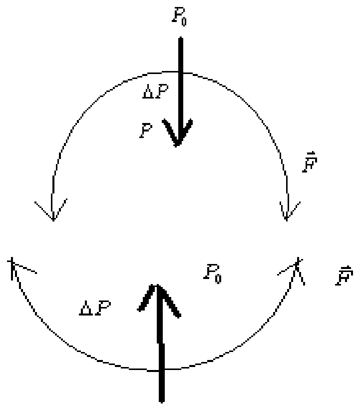


$$\Rightarrow \Delta P = \frac{2\sigma}{r}$$

Généralement la surface n'est pas sphérique mais ellipsoïdale. Dans ce cas :

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux de l'ellipsoïdale (minimum et maximum).

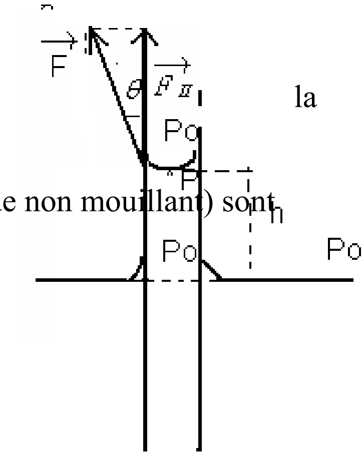


- Pour un liquide non mouillant (surface convexe)

$$P = P_0 + \Delta P$$

- Pour un liquide mouillant (surface concave) :

$$P = P_0 - \Delta P$$



En général, $P = P_0 \pm \Delta P = P_0 \pm \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ où ΔP est la pression capillaire ou pression de Laplace.

Les processus d'ascension (liquide mouillant) et de descente (liquide non mouillant) sont appelés « phénomènes capillaires ».

- Liquide mouillant (ascension)

$P \langle P_0 \Rightarrow P_0 - P = \rho\ g\ h =$ pression hydrostatique

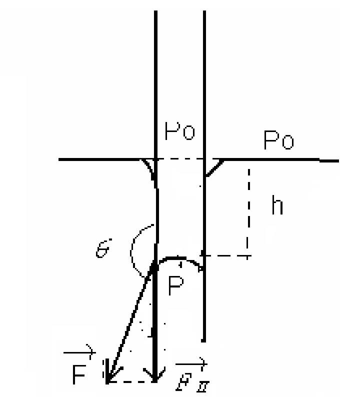
$P \langle P_0 \Rightarrow P_0 - P = \frac{2\sigma}{r} =$ pression capillaire

Donc $\Delta P = P_0 - P = \frac{2\sigma}{r} = \rho g h = \frac{2\sigma\ \cos\theta}{R}$

Où R est le rayon du capillaire .

Ici $\theta \langle \pi/2 \quad 0 \Rightarrow h \ \rangle \ 0$

- Liquide non mouillant (abaissement)



$P \rangle P_0 \Rightarrow P - P_0 = \rho\ g\ h =$ pression hydrostatique

$P \rangle P_0 \Rightarrow P - P_0 = \frac{2\sigma}{r} =$ pression capillaire

Donc $\Delta P = P - P_0 = \dfrac{2\sigma}{r} = \rho g h = \dfrac{2\sigma\ \cos\theta}{R}$

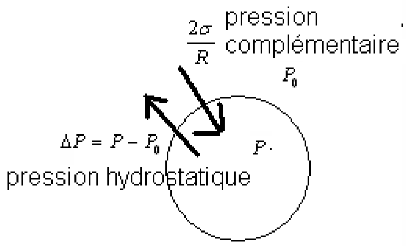
Où R est le rayon du capillaire.

Ici $\theta > \pi/2 \Rightarrow h < 0$

Quand le rayon du capillaire diminue la hauteur h augmente et lorsque $R \geq$ 1 cm, h ≈ 0

Cas d'une sphère $(\theta = 0)$: liquide parfaitement mouillant

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{2\sigma}{r} = \rho g h = \frac{2\sigma\ \cos\theta}{R} = \frac{2\sigma}{R}$$ (Rayon de courbure = rayon du tube)



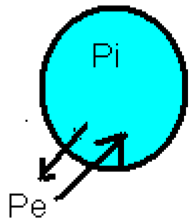
13. APPLICATIONS :

- **Pression à l'intérieur d'une goutte d'eau**

$P_i > P_e$: Pression à l'intérieur est supérieure à la pression extérieure.

A l'équilibre $\Delta P = P_i - P_e = \dfrac{2\sigma}{R}$.

Si $P_e = P_0 \quad \Rightarrow P_i = P_0 + \dfrac{2\sigma}{R}$

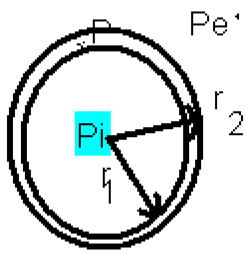


- **Bulle de savon** :

$P > P_e \Rightarrow P - P_e = \dfrac{2\sigma}{r_2}$

$P_i > P \Rightarrow P_i - P = \dfrac{2\sigma}{r_1} \Rightarrow P_i - P_e = 2\sigma(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2})$

Si $r_1 = r_2 = r \Rightarrow P_i - P_e = \dfrac{4\sigma}{r}$

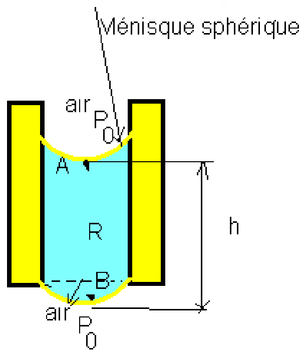


- **Embolie capillaire** :

$P_0 - P_A = \dfrac{2\sigma}{R}$

$P_B - P_0 = \dfrac{2\sigma}{R}$

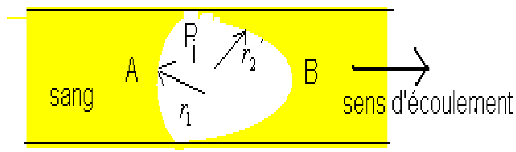
$\Rightarrow P_B - P_A = \dfrac{4\sigma}{R}$



Exemple : Embolie gazeuse $r_1 \rangle r_2$

$$P_i - P_A = \frac{2\sigma}{r_1}$$

$$P_i - P_B = \frac{2\sigma}{r_2}$$



$$\Rightarrow P_B - P_A = 2\sigma(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

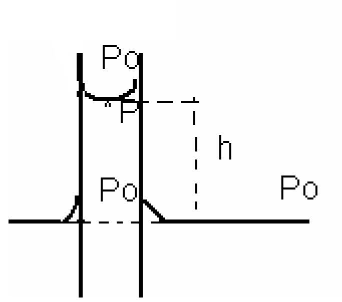
$$\Rightarrow P_B = P_A + 2\sigma(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Lorsque $P_B \rangle P_A$, le sang ne coule pas $\Rightarrow$ embolie gazeuse

14. Mesure de la tension superficielle

- Méthode statique

Pour un liquide parfaitement mouillant
$P \langle P_0 \Rightarrow P_0 - P = \rho\ g\ h =$ pression hydrostatique



$P \langle P_0 \Rightarrow P_0 - P = \frac{2\sigma}{R} =$ pression capillaire

Donc $\Delta P = P_0 - P = \frac{2\sigma}{R} = \rho g h$

$\Rightarrow h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$ C'est la loi de Jurin

- **Stalagmométrie**

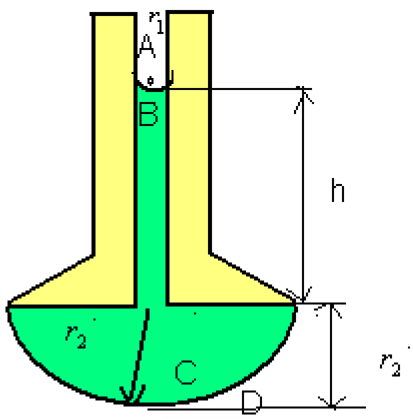
$$P_A = P_D = P_0$$

$$P_A - P_B = \frac{2\sigma}{r_1}$$

$$P_C - P_D = \frac{2\sigma}{r_2}$$

Or $P_C - P_B = \rho g(h + r_2)$

$$\Rightarrow \rho g(h + r_2) = 2\sigma(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$$



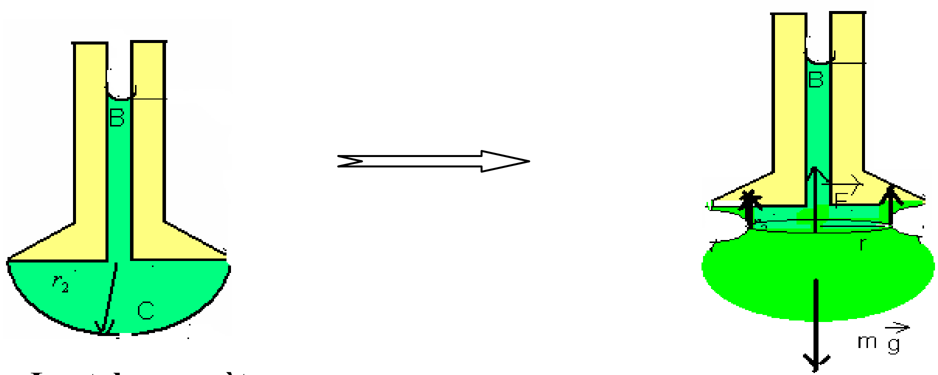
- **Loi de Tate**

Elle donne la relation entre le poids d'une goutte d'un liquide de masse volumique et les forces de tension superficielle au moment de son détachement d'un compte-goutte.

Au moment du détachement de la goutte, son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ est égal à la résultante des forces de tension superficielle exercées sur l'étranglement de rayon r tel que $r_1 \langle r \langle r_2$ où r_2 est le rayon extérieur du tube. Cette force est : $F = 2\pi r\sigma$ (dirigée vers le haut).

Comme il est presque impossible de mesurer le rayon de l'étranglement au moment du détachement, Tate a remplacé $2\pi r$ par Kr_2 où K est la constante de Tate (si on ne change pas du stalagmomètre K= 3,6).

Donc $m = \dfrac{Kr_2\sigma}{g}$ (loi de TATE).



- **Le stalagmomètre** :

C'est un tube a 2 rayons (externe et interne) muni d'un réservoir de volume V_0 . On remplit le réservoir par un liquide de masse volumique et de tension superficielle connues. On compte le nombre de gouttes contenues dans le volume V_0. Ensuite, on prend un autre liquide (de masse volumique connue) et pour lequel on veut déterminer la tension superficielle, et on compte le nombre de gouttes de ce liquide contenues dans le même volume V_0.

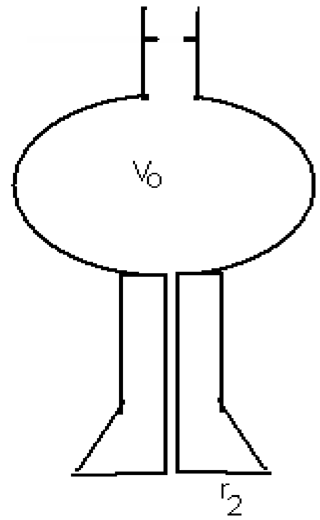
- Liquide connu (ρ_0, σ_0 et n_0)

La masse d'une goutte est $m_0 = \dfrac{\rho_0 V_0}{n_0} = \dfrac{Kr_2\sigma_0}{g}$

- Liquide inconnu (ρ , σ et n)

La masse d'une goutte est $m = \dfrac{\rho V_0}{n} = \dfrac{Kr_2\sigma}{g}$

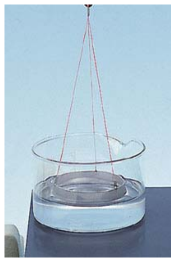
En comparant ces 2 relations on trouve : $\dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \dfrac{n_0\rho}{n\rho_0}$

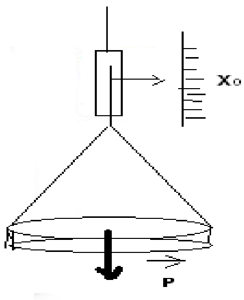


* **Méthode d'arrachement** :

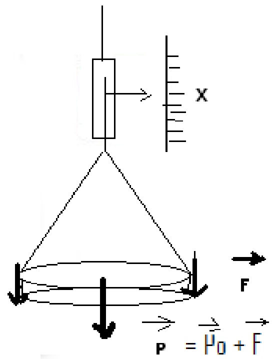
Soit un anneau dont le poids dans l'air est P_0 : ($P_0 = Kx_0$)
Sur la surface d'un fluide (avec les forces de tension superficielle) son poids est P : (P= k x)

on a : $P-P_0 = F = k(x-x_0) = 2(2\pi R)\,\sigma$ où R est le rayon de l'anneau.





Dans l'air



Sur la surface d'un liquide

C. HYDRODYNAMIQUE

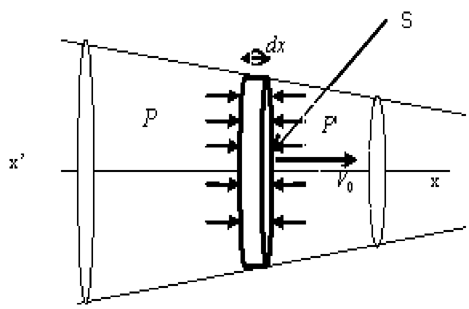
L'hydrodynamique est l'étude des fluides en mouvement. Selon la présence ou l'absence de forces de frottements au sein d'un fluide on distingue :

- Les fluides parfaits : se sont les fluides dans lesquels la viscosité (forces de frottement dans les fluides) est nulle.
- Les fluides réels : sont ceux pour lesquels la viscosité est différente de zéro. En réalité tous les fluides sont réels car, dans la nature, les fluides à viscosité nulle n'existent pas.

I . FLUIDES PARFAITS :

1. Equation de mouvement d'un fluide parfait :

Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable. Le fluide est supposé homogène de sorte que la vitesse $\vec{V}_0$ est parallèle à l'axe (x'x).



Soit un élément de volume de section S et d'épaisseur dx.
L'épaisseur dx est très petit de sorte que les surfaces des deux faces de cet élément soient égales.

La masse de cet élément de volume est
$dm = \rho dV = \rho S dx$.

Les forces exercées sur l'élément de volume sont de deux types : celles dues à la pression et les autres forces extérieures (de gravitation, dues aux champs magnétiques et électriques, ….etc).

Les forces de pression sont exercées de part et d'autre de cet élément. Leur résultante est suivant l'axe (x'x) :

$$dF = PS - P'S = -(P' - P)S = -SdP = -\frac{dP}{dx}Sdx = -\frac{dP}{dx}volume .$$

Soit F_P la force de pression exercée par unité de volume :

$$F_P = \frac{dF}{volume} = -\frac{dP}{dx} .$$

On constate que la pression représente une énergie potentielle par unité de volume, puisque $1\frac{N}{m^2} = 1\frac{N.m}{m^3} = 1\frac{joule}{m^3}$.

Soit F_E la résultante par unité de volume de toutes les autres forces extérieures . La force totale exercée sur cet élément est : $F = (F_E + F_P)volume = (F_E + F_P)Sdx$.

L'équation du mouvement de cet élément de volume s'écrit alors :

$$(F_E + F_P)Sdx = dm\gamma = \rho Sdx\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow F_E - \frac{dP}{dx} = \rho\frac{dv}{dt} .$$

Si la force F_E dérive d'un potentiel E_P de sorte que $F_E = -\frac{dE_P}{dx}$, on obtient :

$$(-\frac{dE_P}{dx} - \frac{dP}{dx}) = \rho\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{dv}{dt} = -\frac{d}{dx}(E_P + P)$$

Dans cette équation E_P représente l'énergie potentielle par unité de volume.

2- Ecoulement en régime de BERNOULLI (écoulement stationnaire)

On distingue les mouvements suivants :

- Lorsque l'aspect du mouvement d'un fluide ne varie pas avec le temps, le mouvement est dit **stable.**
- Lorsque le fluide coule de façon régulière et la vitesse en chacun des points est constante, le mouvement est dit **stationnaire** ou de BERNOULLI.
- Lorsque le fluide se déplace de façon irrégulière et complexe (la pression et la vitesse en chaque point changent de façon imprévisible) , le mouvement est dit **turbulent.**

Dans l'étude de ces mouvements on va considérer la vitesse comme fonction de la position x au lieu du temps t, puisque la vitesse varie avec la position .

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2}).$$

En remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2})$ dans l'équation du mouvement et dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = cste$) on obtient :

$$\frac{d}{dx}(\rho\frac{v^2}{2}) = -\frac{d}{dx}(P + E_P)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\rho v^2 + P + E_P) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 + P + E_P = constante$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie dans l'élément de volume : théorème de BERNOULLI

Où :

$\frac{1}{2}\rho v^2$ est l'énergie cinétique par unité de volume.
P est l'énergie potentielle par unité de volume associée à la pression,
E_P est l'énergie potentielle par unité de volume due à toutes les autres forces extérieures.
Dans un champ gravitationnel où , par exemple , l'énergie potentielle par unité de volume est $E_P = \rho gh$, on a :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gh = Constante.$$

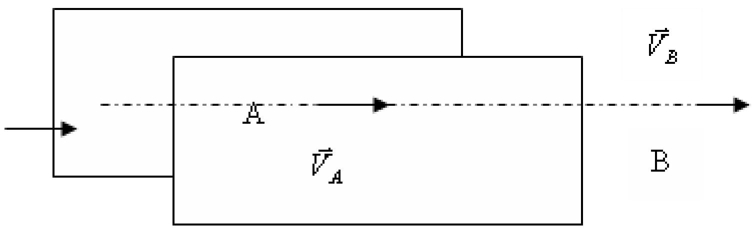
Lorsque le fluide se déplace horizontalement ($h = constante$) , on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P = Constante$$

Dans ce dernier cas, on constate que lorsque la vitesse augmente, la pression diminue et inversement.

Exemple 1 :

En soufflant horizontalement entre 2 feuilles parallèles et verticales, elles s'attirent. Pourquoi ?



Soient A et B deux points situés sur une même horizontale. A se trouve entre les feuilles et B à l'extérieur. Au point A la vitesse du fluide (air) est V_A , et la pression est P_A . Au point B la vitesse et la pression sont respectivement V_B et P_B .
En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + E_P(A) = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + E_P(B)$$

Comme $H_A = H_B$, les énergies potentielles $E_P(A)$ et $E_P(B)$ sont égales .
Donc, on aura :

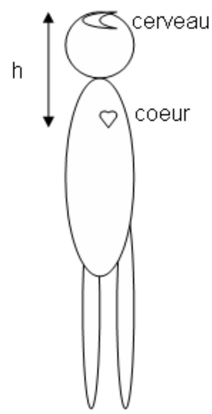
$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho(V_A^2 - V_B^2) = P_B - P_A$$

Comme entre les feuilles la vitesse de l'air a augmenté suite au soufflement, la pression au point A est inférieure à la pression au point B.
$V_A \rangle V_B \Rightarrow \left(V_A^2 - V_B^2\right)\rangle 0 \Rightarrow P_B = P_0 \rangle P_A$.
Donc la pression à l'extérieur des feuilles est supérieure à la pression entre ces deux feuilles , la force de pression exercée de l'extérieur vers l'intérieur est supérieure à la force de pression exercée de l'intérieur vers l'extérieur , et les feuilles s'attirent.

<u>Exemple 2</u> :

La vitesse du sang dans le corps humain est supposée constante. La pression au niveau du cœur est P_C= 13.3 kP_a. Calculer la pression au niveau du cerveau lorsque la différence des hauteurs entre le cerveau et le cœur est $h = 40$ cm, $g = 10 m/s^2$ et la masse volumique du sang est $\rho_S = 1060 kg/m^3$.



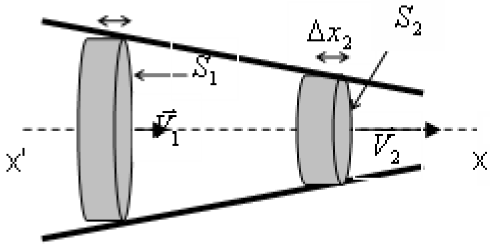
On applique le théorème de Bernoulli entre le cœur et le cerveau :

$$\frac{1}{2}\rho_S V_C^2 + P_C + \rho_S g h_C = \frac{1}{2}\rho_S V_V^2 + P_V + \rho_S g h_V \ .$$

Comme $V_V = V_C$, on obtient :

$$P_V = P_C - \rho_S g(h_V - h_C) = P_C - \rho_S g h = 13300 - 1060.10.0.4 = 9060 P_a .$$

3. <u>Equation de continuité</u> (équation de conservation de masse) :



Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable. L'écoulement est supposé stationnaire (régime de Bernoulli) de sorte qu'il n'y est en aucun point ni perte et ni gain de masse.

Soit $\Delta M_1 = \rho_1 \Delta x_1 S_1$, la masse de l'élément de volume de section S_1 et d'épaisseur Δx_1.
Cette masse du fluide traverse la section S_1 pendant le temps Δt_1. Donc la masse du fluide qui traverse S_1 par unité de temps est :

$$\Delta m_1 = \frac{\Delta M_1}{\Delta t_1} = \frac{\rho_1 \Delta x_1 S_1}{\Delta t_1} = \rho_1 V_1 S_1 \ .$$

De même, pendant le temps Δt_2 la masse du fluide qui traverse la section S_2 est :

$$\Delta m_2 = \frac{\rho_2 \Delta x_2 S_2}{\Delta t_2} = \rho_2 V_2 S_2 \ .$$

Lorsque la masse est conservée (la masse du fluide qui rentre est égale à la masse du fluide qui sort), on aura :

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2 \ .$$

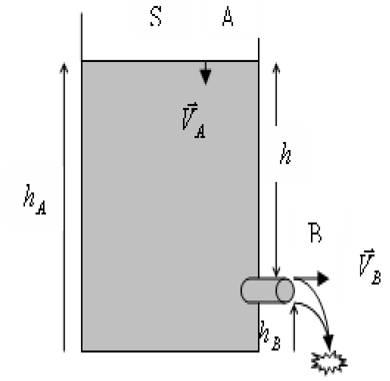
Pour un fluide incompressible ($\rho_1 = \rho_2 = constante$), on obtient :

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \ .$$

L'équation de continuité s'écrit alors : $VS = Constante$. On remarque que la vitesse du fluide est inversement proportionnelle à la section du tuyau.

4. <u>Théorème de TORRECELLI</u> :

En utilisant le théorème de Bernoulli on peut calculer le débit (volume par unité de temps) d'un fluide à travers l'orifice d'un réservoir.
Soient S et s les sections du réservoir et de l'orifice respectivement. La section S est très grande devant celle de l'orifice.
La vitesse d'abaissement du niveau de la surface libre est négligeable devant celle de l'écoulement au niveau de l'orifice .
On suppose aussi que le diamètre de l'orifice est très petit de sorte qu'on ait $h = h_A - h_B$ où A et B sont 2 points situés respectivement sur la surface libre et au niveau de l'orifice.



Les pressions aux points A et B sont égales à la pression atmosphérique P_0 .
En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B, on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + \rho g h_B$$

Comme $P_A = P_B = P_0$, on obtient : $\frac{1}{2}\rho(V_B^2 - V_A^2) = \rho g(h_A - h_B) = \rho g h$.

En tenant compte de fait que $V_B^2 \gg V_A^2$, on obtient finalement : $V_B = \sqrt{2gh}$.

L'expression de V_B est la même que celle d'une masse qui tombe sans vitesse initiale d'une hauteur h .

Le débit est le volume du liquide qui traverse une section S par unité de temps.

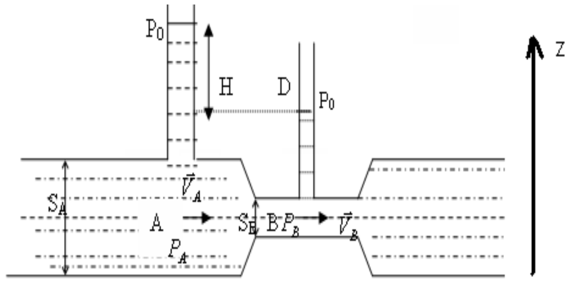
$$Q(débit) = \frac{volume}{temps} = \frac{Sdx}{dt} = SV \ .$$

Donc : $Q = sV_B = s\sqrt{2gh}$. L'unité de Q est : m^3/s.

Lorsque la masse volumique est constante, on a : $Q = sV_B = SV_A = Constante$.

5. Le débitmètre de Venturi :

C'est un tube horizontal étranglé en son milieu et muni de deux capillaires verticaux aux niveau x des points A et B . La section du grand tuyau est S_A et celle de l'étranglement est S_B . Les points A et B se trouvent sur une même horizontale ($h_A = h_B$) . Les vitesses en ces points sont V_A (au point A) et V_B (au point B).



Le théorème de Bernoulli appliqué entre les points A et B nous donne :

$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + E_P(A) = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + E_P(B).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + \rho g h_B.$$

Comme $h_A = h_B$, on obtient : $\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B$.

D'autre part on a :

$$P_A = P_C + \rho g(Z_C - Z_A) = P_0 + \rho g(Z_C - Z_A)$$

$$P_B = P_D + \rho g(Z_D - Z_B) = P_0 + \rho g(Z_D - Z_B)$$

$$Z_C - Z_D = H \ .$$

Donc $P_A - P_B = \rho g(Z_C - Z_D) = \rho g H = \Delta P.$

La différence de pressions $\Delta P = P_A - P_B$ est mesurée avec un manomètre.

Le débit du fluide est constant :

$$Q = S_A V_A = S_B V_B \Rightarrow V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}.$$

Donc, lorsque l'écoulement est horizontal on a :

$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_A^2 + (P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho (V_A^2)(\frac{S_A}{S_B})^2.$$

$$\Rightarrow V_A^2\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}-1\right)=2gH$$

$$\Rightarrow V_A=\sqrt{\frac{2gH}{\frac{S_A^2}{S_B^2}-1}}.$$

et $\quad V_B=V_A\frac{S_A}{S_B}=\frac{S_A}{S_B}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{S_A^2}{S_B^2}-1}}.$

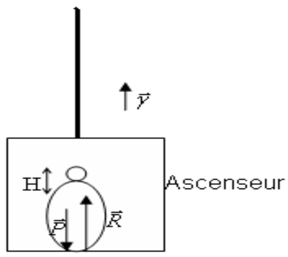
Quelques unités :

1 atm.= 1.013 10^5 $P_{a.}$
1 bar = 10^5 P_a .
1 kgf/m^2= 9.8 P_a.
1 dyne/cm^2 =1 barye =0.1 P_a.

6. Effets de l'accélération sur la circulation sanguine :

Pour étudier l'influence de l'accélération sur la circulation du sang dans le corps humain, on va considérer un ascenseur (avion ou une fusée) qui monte verticalement avec une accélération $\vec{\gamma}$ et dans lequel se trouve un homme ayant pour poids $\vec{P}=m\vec{g}$.
L'équation de mouvement s'écrit :

$$\sum\overrightarrow{forces}=m\vec{\gamma}$$
$$\Rightarrow m\vec{g}+\vec{R}=m\vec{\gamma}$$
$$\Rightarrow mg-R=m\gamma$$
$$\Rightarrow R=m(g+\gamma)$$



Donc $R=m(g+\gamma)=mg'$.

R représente le poids apparent de l'homme lorsqu'il se trouve en mouvement accéléré.

Dans l'équation de Bernoulli on doit remplacer l'accélération de la pesanteur dans l'expression de l'énergie potentielle g par g'.
En appliquant le théorème de Bernoulli entre le cœur C et le cerveau V, tout en supposant que la vitesse du sang est constante, on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho V_C^2+P_C+\rho g' H_C=\frac{1}{2}\rho V_V^2+P_V+\rho g' H_V$$

Comme $V_V=V_C$ et $g'=g+\gamma$, la pression au niveau du cerveau P_V :

$$P_V=P_C-\rho g'(H_V-H_C)=P_C-\rho(g+\gamma)H$$

Donc, lorsque l'accélération γ augmente la pression au niveau du cerveau diminue. Et pour $\gamma\geq 3g$, il se produit un écrasement des artères au niveau du cerveau et un évanouissement est possible de se produire.

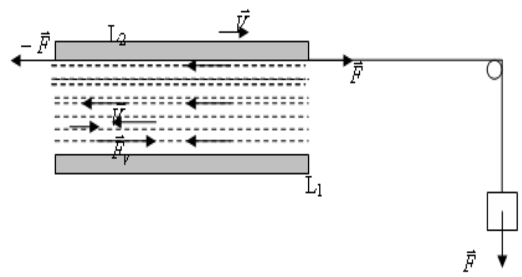
II. FLUIDES REELS

1. Introduction :

Dans l'équation de Bernoulli (qui est valable pour les fluides parfaits) on a négligé les forces de frottement qui agissent sur un fluide en mouvement. En réalité, lorsqu'un fluide coule le long d'une surface, il exerce sur elle une force parallèle dans la direction du mouvement. A son tour, cette surface exerce (réagit) sur le fluide une force égale et opposée à la force parallèle. Cette réaction s'appelle « force visqueuse » ou force de frottement qui s'oppose toujours au mouvement du fluide.

2. Experience :

Pour la mise ne évidence de la force de frottement (force de viscosité) on considère 2 lames planes et parallèles L_1 et L_2, séparées par une distance d et entre lesquelles coule un fluide.



La lame L_1 fixe par contre L_2 se déplace avec une vitesse constante $\vec{V}$ .Pour que le mouvement de la lame L_2 soit uniforme ($V = Cte$) on applique sur L_2 une force égale et opposée à $\vec{F}$. Cette force est la même que celle exercée par le fluide sur la lame L_1 . A son tour, la lame L_1 exerce sur le fluide une force $\vec{F}_V$ de sorte que :

$$\vec{F}_V = -(-\vec{F}) = \vec{F}$$

Soit S la surface de ces lames. L'expérience montre que le rapport $\frac{F}{S}$ est, en même temps, proportionnel à V et inversement proportionnel à d , c'est-à-dire :

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{V}{d} \Rightarrow F = \eta \frac{SV}{d} \ .$$

Où η est le coefficient de proportionnalité (appelé aussi coefficient de Poiseuille ou de viscosité).

L'équation aux dimensions de η s'écrit : $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$.

L'unité de la viscosité est le N.s/m^2= Pa.s (Pascal - seconde).

Unités secondaires :

1 Pa.s = 1 poiseuille = 1 Pl.

1 Poise = 1 P = 0.1 Pl.

Variation de la viscosité des fluides avec la température :

Cas des liquides : Pour les liquides la viscosité augmente avec la diminution de la température selon la loi :

$$\eta(T) = \eta_0 e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} \text{ où :}$$

- ΔE est l'énergie de transition des molécules d'un état d'équilibre à un autre.
- k_B est la constante de Boltzmann ($k_B = 1.3810^{-23}\ j/K.$)

- T est la température thermodynamique (en K).
- η_0 est la viscosité pour $\Delta E = 0\,j$.

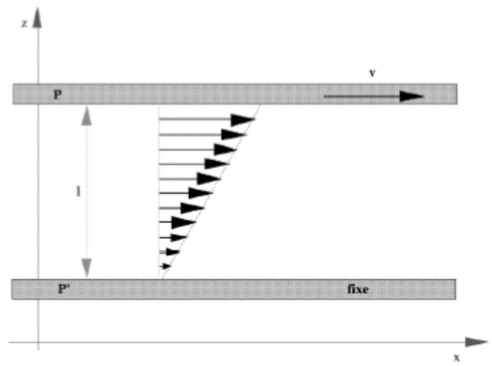
On distingue deux types de liquides : les liquides normaux ($\eta = 5\,10^{-2}\,P$ à $\eta = 1P$) et les liquides visqueux ($\eta = 20$ à $50P$).

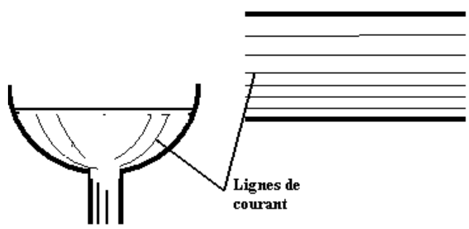
Cas des gaz : Pour les gaz la viscosité est proportionnelle à la racine carré de la température $(\eta \propto \sqrt{T})$. Donc, lorsque la température augmente la viscosité d'un gaz augmente aussi. Pour les gaz la viscosité varie de 1 à 3 10^{-4} P.

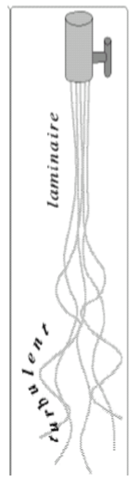
<u>Quelques valeurs de la viscosité de quelques fluides pour des différentes températures :</u>

fluide	$\eta(mPl)$	T(°C)	fluide	$\eta(mPl)$	T(°C)
eau	1.79	0	huile	113	16
	1.00	20		4.9	100
	0.467	60	méthane	0.0109	20
	0.232	100	air	0.0171	0
mercure	1.55	20			

Remarque : Lorsqu'un fluide coule entre deux plaques, les lignes de courant sont parallèles à la surface et entre elles. Le fluide est donc composé de lames parallèles entre elles et à la plaque fixe et qui se déplacent (les lames) avec des vitesses différentes. Ce type d'écoulement est dit « laminaire ». Le fluide en contact avec l'une ou l'autre des plaques s'attache à leur surface à cause des forces adhésives. Donc la couche dufluide en contact avec la lame supérieure (mobile) se déplace avec la même vitesse que celle de la







lame, par contre, l'autre couche, en contact avec la lame fixe, reste immobile. Cette couche ralentit le mouvement de la couche juste en dessus à cause de la force visqueuse qui, à son tour, ralentit aussi le mouvement de la couche suivante et ainsi de suite. Les forces visqueuses sont donc des forces de frottement entre les couches d'un même fluide lorsu'elles se déplacent les unes sur les autres.La viscosité est une propriété intrinsèque du fluide.

On définit la viscosité cinématique comme le rapport entre la viscosité dynamique (η) et la masse volumique ρ : $\eta_c = \eta/\rho$.

On définit aussi la fluidité d'un fluide comme l'inverse de la viscosité dynamique.

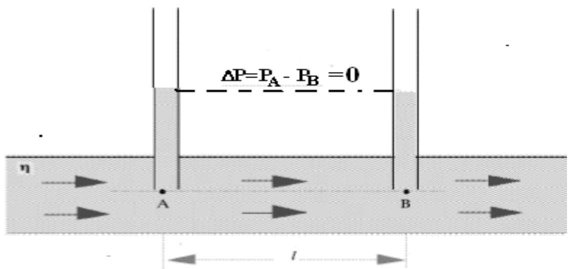
3. Les differents types d'écoulement

On distingue:

- Ecoulement de Bernoulli: Le fluide est parfait et les vitesses sont égales et parallèles en tout point situé sur une même section de la conduite.
- Eoulement laminaire (de Poiseuille): le fluide est visqueux et les vitesses des couches sont parallèles mais différentes en grandeurs. La vitesse est nulle à la paroi et elle est maximale en son centre.
- Ecoulement turbulent (de Venturi): les vitesses sont aléatoires en direction et en grandeurs et la pression change de façon imprévisible. Les lignes de courant sont alors ondulatoires et très complèxes.

4. Pertes de charge:

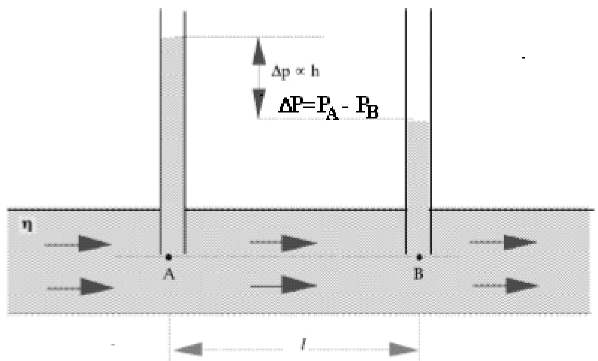
Lorsqu'on est en présence de frottements, le théorème de Bernoulli ne s'applique plus et la pression n'est plus constante le long d'une conduite horizontale. Lorsque le fluide est parfait, le théorème de Bernoulli appliqué entre les points A et B nous donne:



$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$$

Comme $v_A = v_B$ (même section) et $h_A = h_B$ (conduite horizontale), ceci nous donne une différence de pression entre les points A et B nulle. Donc $\Delta P = P_A - P_B = 0$

Lorsque le fluide est réel, on peut appliquer le théorème de Bernoulli généralisé dans lequel on doit tenir compte de la chute de pression entre les points A et B.



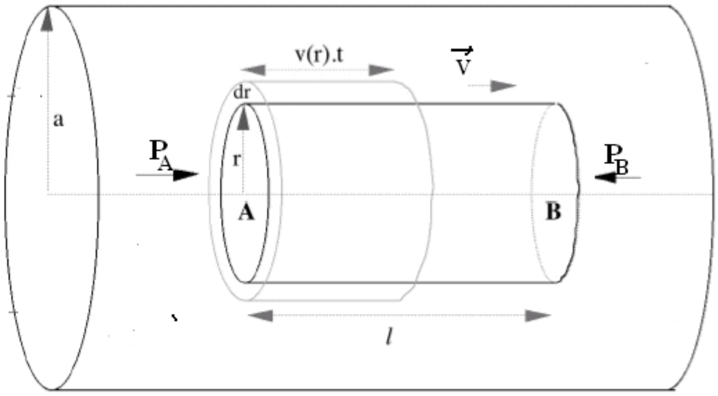
$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2 + \Delta P$$

Où $\Delta P = P_A - P_B$ est la perte de charge entre les points A et B. Donc, La pression dans un fluide réel en écoulement diminue tout le long de la conduite.

5. Ecoulement d'un fluide visqueux et incompréssible le long d'un econduite horizontale: théoème de Poiseuille

Soit un fluide incompressible et visqueux (de viscosité η) qui coule horizontalement dans un econduite cylindrique de rayon R; Le fluide est composé de couches cylindriques coaxiales (même axe) . La couche accolée à la paroi de la conduite a une vitesse nulle et celle au centre, elle est dotée d'une vitesse maximale $V_{\max}$. Cette vitesse décroit uniformément de jusqu'à 0. La vitesse moyenne du fluide le long de cette conduite est $\frac{V_{max}}{2}$ Déterminons d'abord la viteese d'écoulement d'une couche fluide quelconque, par exemple la couche de rayon r, de longueur l (entre A et B) et d'épaisseur dr. Les forces exercées sur cette couche sont dues à la pression et aux forces de frottement. La force due à la pression est dirigée de A vers B car la pression en A est supérieure à la pression en B (perte de charge).

$$F_P = (P_A - P_B)S' = (P_A - P_B)\pi r^2$$

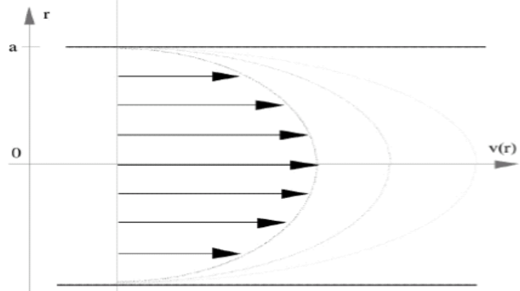


Ici S' est la section du cylindre.
Le mouvement de ce cylindre de fluide est ralenti par la force de viscosité que la couche entourant sa surface externe appliquée sur lui:

$$F_v = -\eta S \frac{dv}{dr}$$

Le signe "-" signifie que la vitesse de la couche augmente avec la diminution de son rayon.La surface S represente la surface latérale du cylindre (la surface en contact avec les couches voisines du fluide).

$$S = 2\pi r l$$



Donc: $F_v = -\eta(2\pi r l)\frac{dv}{dr}$

Comme le fluide s'écoule de façon régulière (uniforme), la résultante des forces est nulle. Les forces de pression et de viscosité sont donc égales en grandeur:

$$F_P = F_v = -\eta(2\pi r l)\frac{dv}{dr} = (P_A - P_B)\pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{(P_A - P_B)r}{2\eta l}$$

$$\Rightarrow \int_0^v dv = -\frac{(P_A - P_B)}{2\eta l}\int_R^r r\,dr$$

Car pour r = R, v = 0 m/s.
Finalement, la vitesse varie en fonction du rayon r selon la formule:

$$v(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

Donc la courbe de la fonction $v(r)$ est une parabole.

Le débit du fluide est défini comme étant le volume qui traverse la section du cylindre par unité de temps:

$dQ = \dfrac{dV}{dt} = dS''v$ (loi de continuité)

Ici $dS'' = 2\pi r dr$ est la section de la couche.

Donc: $dQ = v(r)(2\pi r dr) = \dfrac{(P_A - P_B)}{4\eta l}(R^2 - r^2)(2\pi r dr)$

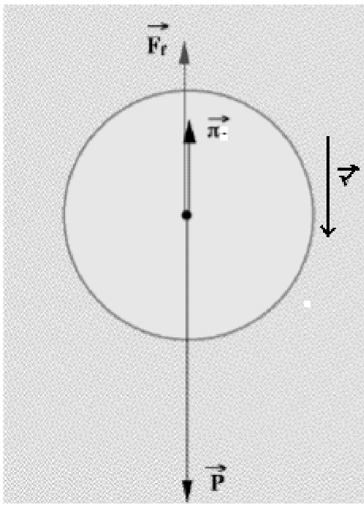
Le débit total est :

$$Q = \frac{(P_A - P_B)}{4\eta l}\int_0^R (R^2 - r^2)(2\pi r dr) = \frac{2\pi(P_A - P_B)}{4\eta l}[(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4})]_0^R$$

Finalement: $Q = \dfrac{(P_A - P_B)\pi R^4}{8\eta l} = \dfrac{\Delta P \pi R^4}{8\eta l}$

Cette équation est valable uniquement lorsque l'écoulement se fait avec des vitesses faibles de sorte que le régime est de type de Poiseuille (laminaire).

6. Mouvement d'un fluide dans un fluide visqueux : loi de Stockes



Soit un corps solide da masse volumique ρ_0 et de volume V. Il est lâché sans vitesse initiale dans un fluide visqueux de masse volumique ρ et de viscosité η. Il est soumis à 3 forces : son poids ($P = \rho_0 g V$), la poussée d'Archimède ($\Pi = \rho g V$) et la force de frottement ($F_r = k\eta v$) .

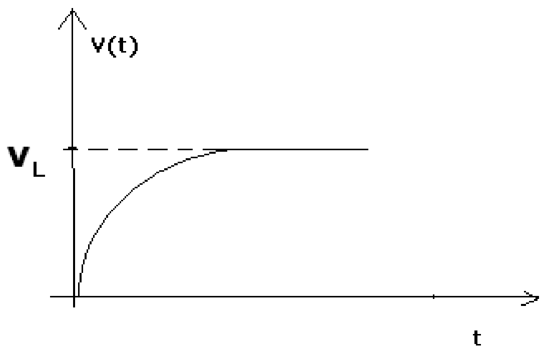
L'équation du mouvement du solide s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F_r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho_0 g V - \rho g V - k\eta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{(\rho - \rho_0)gV - k\eta v} = \frac{1}{m}\int dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k\eta}\ln[(\rho_0 - \rho)gV - k\eta V] = \frac{dt}{m} + Cte$$



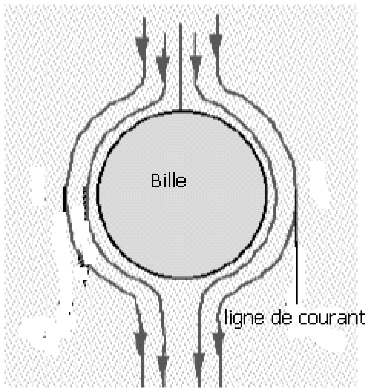
Comme à t = 0 , v = 0 , la constante est :

$$Cte = -\frac{1}{k\eta}\ln[(\rho_0 - \rho)gV]$$

Donc la vitesse en fonction de temps est donnée par :

$$v(t) = \frac{(\rho_0 - \rho)gV}{k\eta}(1 - e^{-\frac{k\eta}{m}})$$

Lorsque t tend vers l'infini, la vitesse tend vers une valeur fixe qu'on appelle la vitesse limite v_L :



$$v(\infty) = v_L = \frac{(\rho_0 - \rho)gV}{k\eta}$$

Durant les premières secondes le mouvement est accéléré et après il devient uniforme.
Exemple pratique: le parachutiste.

La loi de Stockes donne la force visqueuse pour uncorps solide et sphérique, de masse volumique quelconque et de rayon r animé d'une vitesse dans un fluide visqueux de viscosité η. Pour un corps sphérique de rayon r la constante de proportionnalité k est égale à $6\pi r$. Comme le volume est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, la vitesse est :

$$v(t) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_0 - \rho)g}{6\pi r\eta}(1 - e^{-\frac{k\eta}{m}}) = \frac{2r^2(\rho_0 - \rho)g}{9\eta}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Où τ est une constante de temps.
Si le mouvement est uniforme : $v(t) = v_L$ la viscosité peut etre déterminée par la relation suivante qui est appelée "loi de Stockes":

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_0 - \rho)}{9v_L}$$

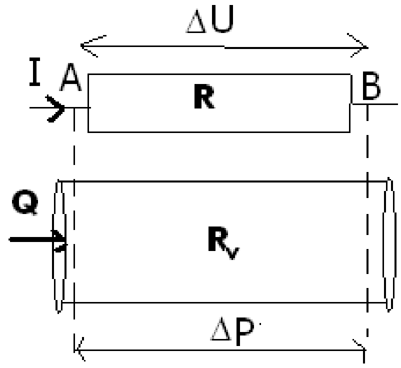
7. Ecoulement turbulent et le nombre de Reynolds

Pour savoir si un écoulement est laminaire ou turbulent, on applique la régle empirique de Reynolds. Soit un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η . Il coule dans une conduite de rayon r avec une vitesse moyenne $\bar{v}$. Le nombre de Reynolds (nombre parce que il est sans dimensions) est donné:

$$N_R = \frac{2\bar{v}\, r\rho}{\eta}$$

Il a montré que :
Si $N_R > 2000$, l'écoulement est turbulent (stable)
Si $N_R < 1000$? L'écoulement est laminaire (stable)
Si $1000 < N_R < 2000$, l'écoulement est instable

8. Résistance vasculaire (résistance à l'écoulement)



Elle est définie comme le rapport eentre la perte de charge ΔP et le débit du fluide Q .

$$R_V = \frac{\Delta P}{Q}$$

Pour un écoulement laminaire on a :

$R_V = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$ où R est le rayon du tuyau et l sa longueur.

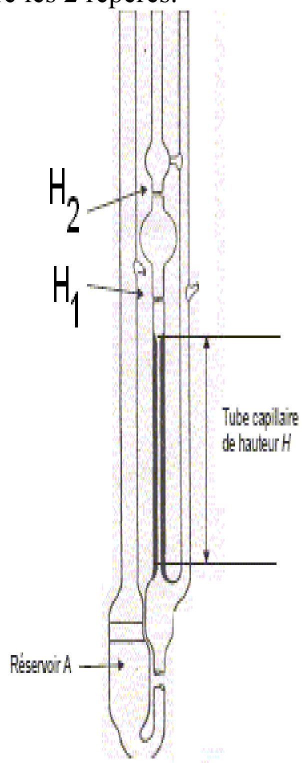
Par analogie à la loi d'Ohm (électricité), on a :

En électricité: $\Delta U = RI$

En mécanique des fluides: $\Delta P = R_V Q$

9. Mesure de la viscosité (viscosimètre d'Ostwald)

C'est une méthode de mesure relative. Elle consiste à comparer le débit d'un fluide de viscosité inconnue à celui d'un fluide de viscosité connue. Un volume du fluide connu s'écoule entre les repères H_1 et H_2, et à chaque fois on mesure le temps d'écoulement entre les 2 repères.



Liquide de viscosité inconnue: $Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta l}$ en 1 seconde,

Liquide de viscosité connue: $Q_0 = \frac{V_0}{t_0} = \frac{\pi R^4 \Delta P_0}{8\eta_0 l}$ en 1 seconde.

Comme $\Delta P = \rho g \Delta h$ (Δh est la même dans les 2 expériences)

Donc : $\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$

Le rapport des volumes est : $\frac{V}{V_0} = 1 = \frac{\Delta P}{\Delta P_0} \frac{t}{t_0} \frac{\eta_0}{\eta}$

En mesurant le temps mis par le liquide pour s'écouler entre les 2 repères, on obtient :

$$\eta = \frac{\rho \eta_0 t}{\rho_0 t_0}$$