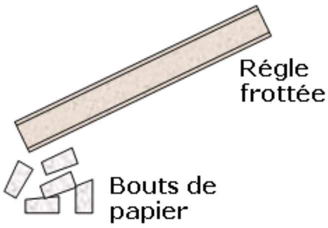
CHAPITRE 2

ELECTROSTATIQUE

I. Généralités:

a) **Phénomènes électrostatiques**: Les phénomènes électrostatiques sont des phénomènes naturels que l'homme rencontre dans sa vie quotidienne comme l'attraction de petits objets en papier par des corps frottés, l'écartement d'un filet d'eau par un peigne après avoir peigner les cheveux …etc. Thalès fût le premier à constater (600 ans avant J.C.) qu'une baguette d'ambrefrottée attire des morceaux de paille.



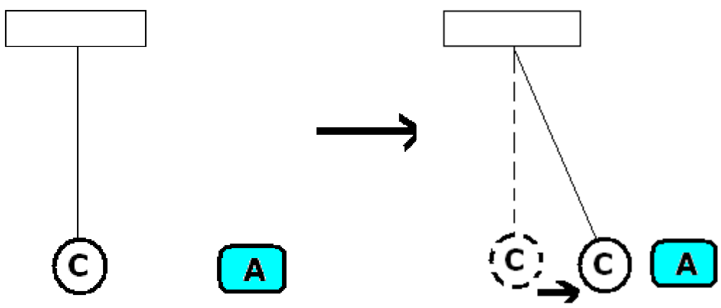
Le mot " électricité" vient du grec "elektron" qui signifie "ambre". L'électrostatique est l'étude de l'électricité à l'état statique. L’électricité trouve des applications dans le biomédical en particulier pour expliquer certains phénomènes liés au fonctionnement du corps humain comme l'électrocardiographie (qui est une technique d'enregistrement des potentiels électriques du myocarde (ECG)) et l'électroencéphalographie (qui est une technique d'enregistrement des potentiels électriques au niveau du cerveau (EEG)).

b) **Processus d'électrisation**: L'électricité statique est obtenue par frottement ou par contact.

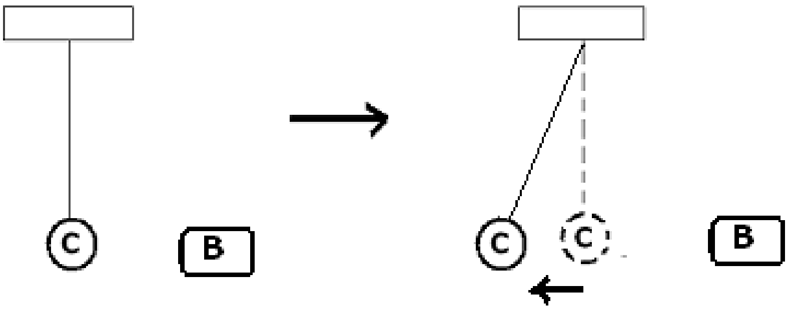
b.1 Electrisation par frottement: Soient les corps suivants:

Verre frotté avec de la soie (A) Ambre frotté avec de la fourrure (B) Boule de liège (C)

On réalise les expériences suivantes:



Entre les corps C et A se produit un phénomène d'attraction



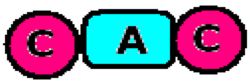
Entre les corps C et B se produit un phénomène de répulsion

Ces deux phénomènes sont des processus d'électrisation par frottement.

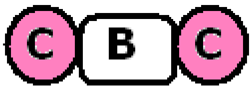
Dans la nature, il y a 2 types d'électricité : *une électricité négative (ambre) et une électricité positive (verre). On aurait pu les appeler " verte" et "rouge".*

b.2: Electrisation par contact:

Soient les corps suivants:

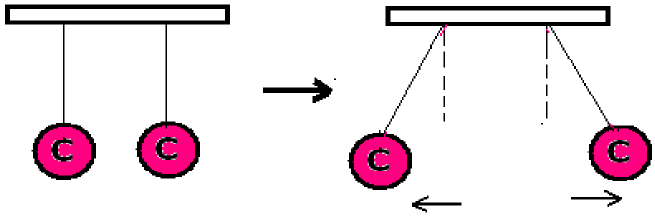


Deux (2) boules de liège ayant subi un contact avec A (déjà frotté avec de la soie) et

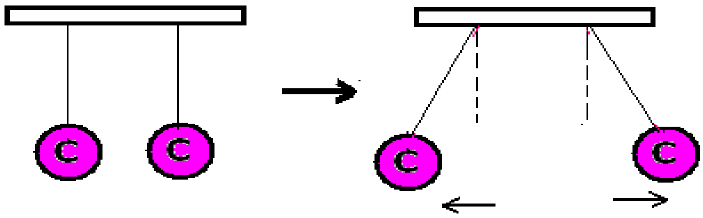


deux autres boules de liège ayant subi un contact avec B (déjà frotté avec de la fourrure)

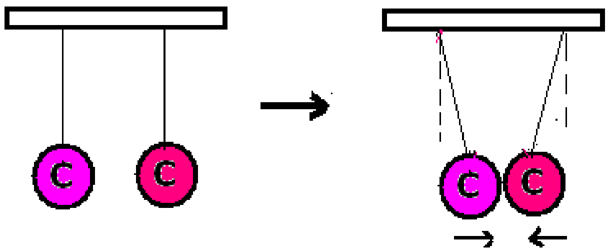
On réalise les expériences suivantes:



Répulsion



Répulsion



Attraction

Ces deux phénomènes sont des processus d'électrisation par contact.

On constate d'après ces expériences que : ***Deux charges de même nature (même signe) se repoussent et deux charges de nature différentes s'attirent***.

c. Origine d'électrisation:

Les processus d'électrisation s'expliquent par le transfert de charges élémentaires (électrons)

Dans le cas du frottement:

Verre + soie: les électrons passent du verre vers la soie, donc le verre est chargé positivement et la soie négativement.

Ambre + fourrure : les électrons passent de la fourrure vers l'ambre, donc la fourrure est chargée positivement et l'ambre négativement.

Série triboélectrique: C'est une série de matériaux naturels ou synthétiques obtenue expérimentalement:

……….-verre –mica-laine-poil de chat- bois- ambre- résine-souffre- …….

Si on frotte le corps "**n**" dans la série avec le corps "**n+1**" ou plus, le corps "**n**" se charge positivement et le corps "**n+1**" se charge négativement.

Dans le cas d'électrisation par contact:

Si on met en contact une boule de liège avec du verre préalablement frotté avec de la soie, les électrons vont passer de la boule vers le verre, de sorte que, après le contact, le verre deviendra neutre.

d. Charges électriques: Du point de vue électrique, dans la nature, il existe 3 types de corps:

- Corps électriquement neutre: le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement positif: le nombre de charges positives est supérieur au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement négatif: le nombre de charges positives est inférieur au nombre de charges négatives.

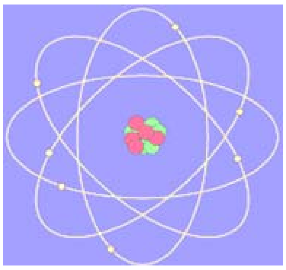
e. Structure de la matière:

La matière est constituée d'atomes, d'ions et de molécules. Chaque atome est composé d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. Electriquement, l'atome est neutre.

L'électron (découvert en 1909 par **Millikan**) est la charge élémentaire négative et vaut $-1{,}6\ 10^{-19}$ C (Coulombs).

Le noyau (découvert en 1911 par **Rutherford**) est constitué de particules chargées positivement (protons) et de particules électriquement neutres (neutrons). Ces derniers ont été découverts par **Chadwick** en 1932.

Les protons et les neutrons sont appelés "nucléons".



Atome $^{A}_{Z}X$

Z= nombre d'électrons

A= nombre de nucléons

N= A-Z = nombre de neutrons

Dans la nature il y a des molécules simples (composées de mêmes atomes comme H_2) et des molécules composées (constituées d'atomes différents : H_2O).

Particule	Charge	Masse
Electron	$-1,6\ 10^{-19}$ C	$9,1\ 10^{-31}$ kg
Proton	$+1,6\ 10^{-19}$ C	$1,67\ \ 10^{-27}$ kg
Neutron	0 C	$1,67\ \ 10^{-27}$ kg

N.B: La masse du proton est 1850 fois plus grande que celle de l'électron.

Les baryons sont les protons et les neutrons. Chaque baryon est constitué de 3 quarks.
Il existe 2 types de quarks: les quarks up ou quarks U de charge +2e/3 et les quarks down ou quark d de charge -e/3.

- Un proton est constitué de 2 quarks U et d'un quark d, ce qui donne une charge de proton égale à : 2e/3 + 2e/3 – e/3 = e
- Un neutron est constitué de 2 quarks d et d'un quark U, ce qui donne une charge de neutron égale à : 2e/3 – e/3 – e/3 = 0

f. Les forces de la nature :

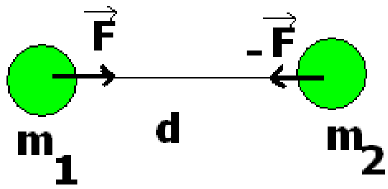
Dans la nature il y a 4 types de forces dont " sont d'origine électriques:

- ✓ **Forces nucléaires faibles**: assurent la cohésion des baryons (quark-quark)
- ✓ **Forces nucléaires fortes**: assurent la cohésion du noyau (proton-neutron)
- ✓ **Forces électromagnétiques** : assurent la cohésion de l'atome (noyau-électrons-quark)
- ✓ **Forces gravitationnelles**: assurent la cohésion à grande échelle de l'Univers.

II. Forces électriques: loi de Coulomb

Rappels sur la loi de gravitation universelle:

Deux corps de masse m_1 et m_2, distants de d, s'attirent mutuellement par une force radiale dont le module est :



$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

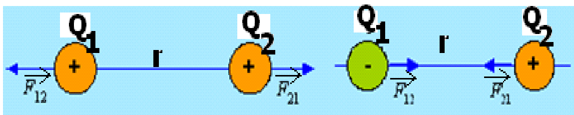
Où G est la constante de gravitation universelle (G = 6.67 10 $^{-11}$ SI (N.m^2/kg^2))

Si, par exemple, M est la masse de la Terre (M= 6 1024 kg) et R son rayon (R=6400 km), la force gravitationnelle est : $F = G\dfrac{m_1 M}{R^2} = m_1 g$

Sur la surface de la Terre F représente le poids du corps de masse m_1.

Force électrique:

Deux charges électrique Q_1 et Q_2, distantes de r, s'attirent ou se repoussent mutuellement par une force F telle que:



- ✓ F est radiale (dirigée suivant la droite joignant les 2 charges)
- ✓ Proportionnelle à Q_1
- ✓ Proportionnelle à Q_2
- ✓ Inversement proportionnelle à r^2

Donc le module de cette force est: $F = k\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

Avec : $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\,10^9\, N.m^2.C^{-2}$

Où ε_0 est la permittivité du vide (elle se mesure en farads par coulomb (F/C))
Cette formule est valable dans le vide pour des charges sphériques et immobiles.

N.B: Dans un milieu matériel (autre que le vide) ( ) on a : $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$ avec $\epsilon = \varepsilon_r \epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité relative du milieu et ϵ_0 celle du vide ($\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2} \approx 8.85\,10^{-12}\, SI$).

Exemples :

Exemple 1:

Soient 2 électrons dans le vide et distants de r. Comparez les forces gravitationnelle et électrique qui s'exercent sur ces 2 particules.

$On\ a :\ \ m = 9{,}1\ 10^{-31}\ kg\ et\ Q = 1{,}6\ 10^{-19}\ C$

La force électrique est répulsive et vaut: $F_e = k\dfrac{Q^2}{r^2}$

La force gravitationnelle est attractive et vaut: $F_g = G\dfrac{m^2}{r^2}$

Si on compare ces 2 forces on trouve: $\frac{F_e}{F_g} = \frac{kQ^2}{Gm^2} = \frac{(9\ 10^9)(1{,}6\ 10^{-19})^2}{(6{,}67\ 10^{-11})(9{,}1\ 10^{-31})^2} = 4{,}17\ \ 10^{42}$

Donc la force d'origine électrique est très importante devant la force gravitationnelle.

Note:

- ✓ La force électrostatique est nettement plus grande que le poids des bouts de papier attirés par la règle frottée.
- ✓ Il n'y a pas de collisions entre les corps célestes car ils sont électriquement neutres.

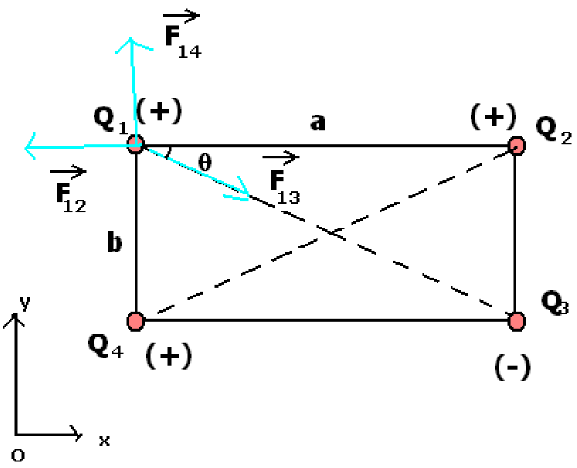
Exemple 2:

Soient 4 charges ponctuelles se trouvant aux sommets d'un rectangle de longueur a= 4 m et de largeur b = 3 m. Q_1 = 1C, Q_2= $2Q_1$, Q_3=- $3Q_1$ et Q_4=$4Q_1$

Trouvez la direction et la grandeur de la force exercée sur la charge Q_1 par les 3 charges;

Pour résoudre les exercices de ce type on doit suivre les étapes suivantes:

- ➢ On mentionne d'abord le signe de chaque charge.
- ➢ On trace les vecteurs forces en respectant la loi de Coulomb.
- ➢ On calcule le module de chaque force.
- ➢ On choisit un repère (xOy).
- ➢ On calcule les projections de cette force (force résultante) sur les axes Ox et Oy.
- ➢ On calcule le module de la force résultante.



Les modules des forces :

$$F_{12} = k\,\frac{Q_1Q_2}{a^2} = \frac{9}{16}\,10^9\,N$$

$$F_{13} = k\,\frac{Q_1Q_3}{a^2+b^2} = \frac{27}{25}\,10^9\,N$$

$$F_{14} = k\,\frac{Q_1Q_4}{b^2} = 4\,10^9\ \ N$$

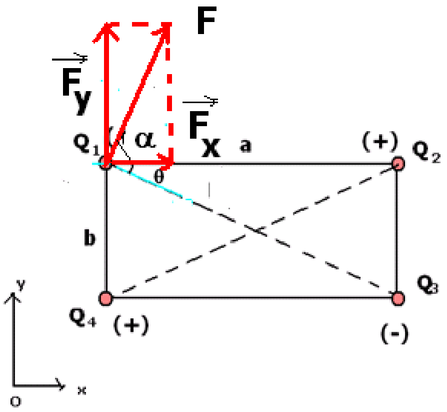
Calcul des projections:

$\vec{F} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{14}}$

$$F_x = F_{13}\, cos\theta - F_{12} = \left(\frac{27}{25}\frac{4}{\sqrt{25}} - \frac{9}{16}\right) 10^9\ N = 0.864\ 10^9\ N$$

$$F_y = F_{14} - F_{13}\, sin\theta = \left(4 - \frac{27}{25}\frac{3}{5}\right) 10^9\ N = 3.352\ 10^9\ N$$

Calcul de la force résultante ainsi que sa direction:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10^{10}\sqrt{8.64^2 + 33.52^2} = 34.61\ 10^{10}\ N$$

$$tg\ \alpha = \frac{F_x}{F_y} = 3.87$$

Donc:

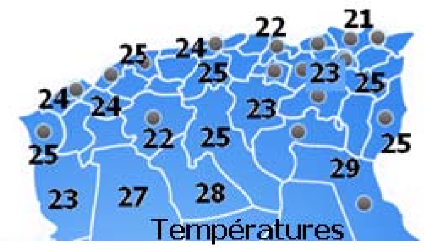
$$\alpha = 75.5°$$

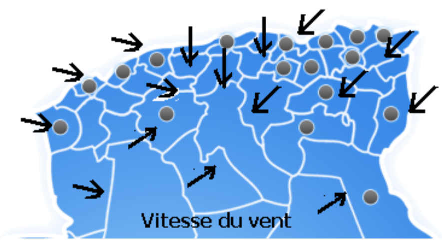
III. Champ électrostatique

Rappels: champ scalaire et champ vectoriel

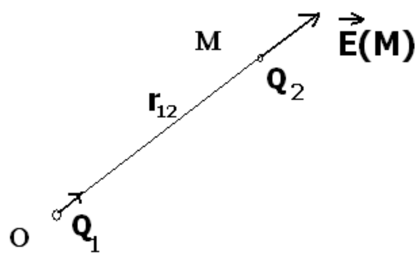
Champ de scalaires : A tout point M(x,y,z) de l'espace on lui associe une fonction scalaire F(x,y,z) comme par exemple la pression, la température …..Etc. L'ensemble de ces points forment un champ de scalaires.

Champ de vecteurs: A tout point M(x,y,z) de l'espace on lui associe une fonction vectorielle comme par exemple la vitesse , la force, …etc. L'ensemble de ces points forment un champ de vecteurs.





Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle:

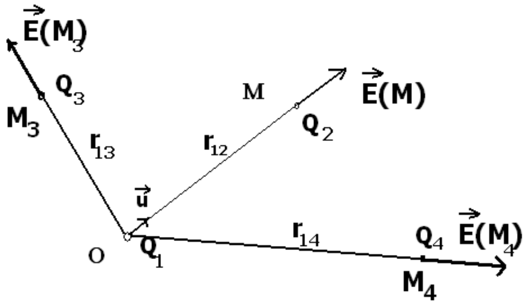


Soient 2 charges ponctuelles Q_1 (située au point O) et Q_2 (située au point M)

Q_1 exerce sur Q_2 la force: $\overrightarrow{F_{12}} = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u} = Q_2\,\vec{E}(M)$

Avec : $\vec{E}(M) = k\,\frac{Q_1}{r_{12}^2}\,\vec{u}$

Cette même charge va créer aux points M_3 et M_4 respectivement les champs électriques $\vec{E}(M_3)$ et $\vec{E}(M_4)$.

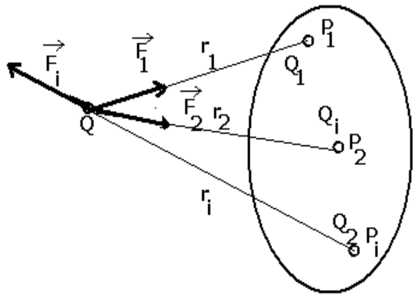


Donc une particule de charge Q située en O crée en un point M de l'espace (distinct de O et distant de r) un champ vectoriel : $\vec{E}(M) = k\frac{Q}{r^2}\,\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}$ appelé champ électrostatique

L'unité de $\vec{E}(M)$ est le N/m ou V/C.

Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles:

Soient n particules de charge Qi, situées à des points Pi. Quel est le champ créé par ces charges en un point M de l'espace?



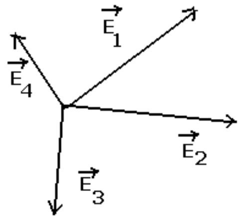
Si au point M se trouve la charge Q, la force résultante exercée par toutes les autres charges est :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} kQ\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

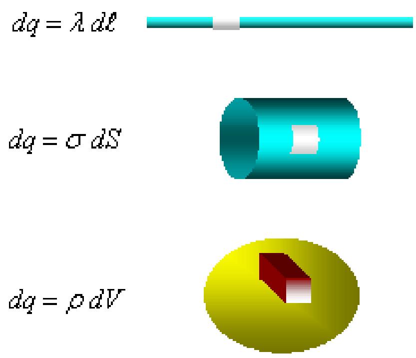
Donc :

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_i = Q\,\vec{E}(M)$$

Avec $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$ qui est le principe de superposition



Différentes distributions de charges:



Dans la nature on rencontre toujours des distributions continues de charges:

- Conducteur linéaire uniformément chargé: la distribution est linéique de distribution linéique de charge $\lambda = \frac{dQ}{dl}$ en C/m.
- Conducteur uniformément chargé sur sa surface: la distribution est surfacique de densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ en C/cm^2.
- Conducteur uniformément chargé en volume : la distribution est volumique de densité volumique de charge $\rho = \frac{dQ}{dV}$ en C/cm^3.

Si on a affaire à une distribution continue de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution en un point quelconque de l'espace est :

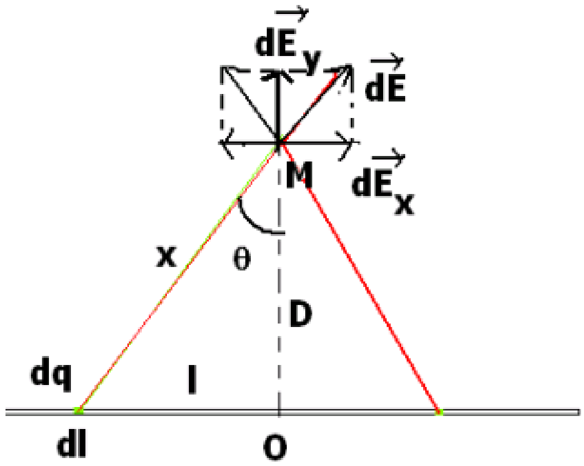
$$\vec{E}(M) = \oint_{distribution} d\vec{E}(M)$$

$$avec \quad d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{u}$$

Exemple : Calculez le champ électrostatique créé par un fil conducteur de longueur infinie et de densité linéique de charge λ en un point M situé à une distance D du fil.

La charge dq située sur la distance dl va créer au point M le champ:

$$d\vec{E} = d\vec{E_x} + d\vec{E_y}$$



Le champ total est:

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \sum d\vec{E_x} + \sum d\vec{E_y}$$

Pour raison de symétrie on a:

$$\sum d\vec{E_x} = 0$$

Le champ résultant est donc dirigé suivant (Oy) et vaut:

$$E = \sum dE_y = \int dE_y$$

Comme $dE_y = dE\ cos\theta$, on obtient:

$$E = \int \frac{kdQ\ \cos\theta}{x^2} = \int \frac{k\lambda dl}{x^2} cos\theta$$

D'autre part: $x = \frac{D}{cos\theta}$ $et \ \ l = Dtg\theta$

Donc :$dl = \frac{D}{cos^2\theta}\ d\theta$

Pour décrire tout le fil (de $-\infty$ à $+\infty$) on doit varier θ de$-\frac{\pi}{2}$jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

Finalement:

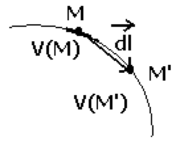
$$E = \int \frac{k\lambda dl}{x^2} cos\theta = \int \frac{k\lambda}{\left(\frac{D}{cos^2\theta}\right)}\left(\frac{Dd\theta}{cos^2\theta}\right) cos\theta = \frac{k\lambda}{D}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\theta\ d\theta = \frac{2k\lambda}{D}$$

IV. Potentiel électrostatique:

Pour faire un calcul rapide du champ électrostatique, on remplace le champ de vecteurs par un champ de scalaires car il est plus facile de travailler avec des scalaires qu'avec des vecteurs.

On définit :

- Au point M(x,y,z) on définit un scalaire $V(M)$
- Au point M'(x', y', z') on définit un autre scalaire $V(M')$



La différence entre ces 2 scalaires s'écrit:

$$dV(M) = V'(M) - V(M) = \frac{dV}{dl}.dl = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

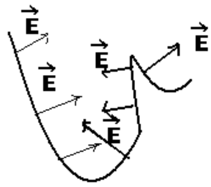
Cette expression est obtenue par analogie à la loi de gravitation universelle:

- Force gravitationnelle : $\vec{F} = G\frac{mM}{r^2}\vec{u} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$ (Newton 1687)
- Force électrique : $\vec{F} = G\frac{QQ'}{r^2}\vec{u} = Q'\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ (Poisson 1813)

Définition:

Le potentiel électrostatique est relié au champ électrostatique par la relation: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Le signe "-" est choisi par convention .Lorsque le potentiel V augmente le champ électrostatique diminue.

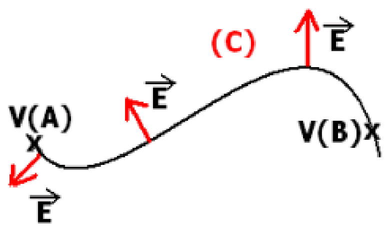
Si sur une courbe (C) on a $dV = 0$, donc le potentiel est constant sur cette courbe. Cette courbe est dite "équipotentielle" et le champ électrique est perpendiculaire à cette courbe $E \perp (C)$.



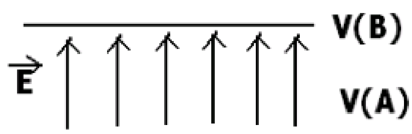
Définition: On appelle la circulation de $\vec{E}$ le long de la courbe (C) entre les points A et B, l'intégrale suivante:

$$C = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$



Les lignes de champ vont des régions à grands potentiels vers des régions à faibles potentiels. Dans notre cas: $\vec{E}.\overrightarrow{dl} > 0 \Rightarrow V(A) > V(B)$



Potentiel créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q située au point M d'une courbe (C) et distante de r .

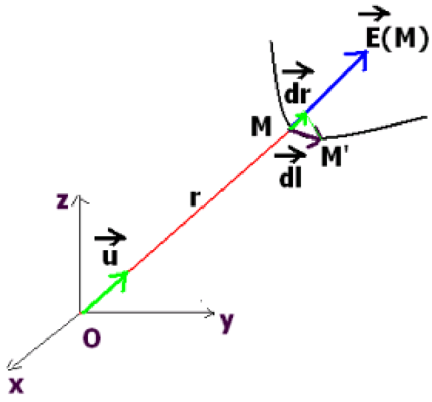
Soit $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$.

Le champ électrostatique créé par cette charge au point M est :

$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + cte$$



Le potentiel à l'infini est supposé égal à une constante V_0.

Donc:

$$V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Remarques :

- $V_0 = 0 \; pour \quad r = \infty$
- V se mesure en Volts (V)
- Le potentiel mesure le degré de l'électrification de la substance. plus le potentiel est grand et plus le nombre de charges contenues dans cette substance est grand. C'est comme en thermodynamique lorsque la température augmente, la quantité de chaleur augmente.

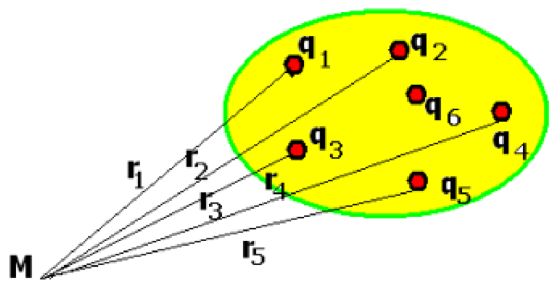
Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles. Le champ électrostatique créé par ces charges en un point M de l'espace est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}(M$$

Le potentiel créé par ces charges au point M est :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M$$



Comme la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ est toujours vérifiée, on aura:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Si la distribution est continue on aura:

$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + V_0$$

Pour une distribution linéique de charges:

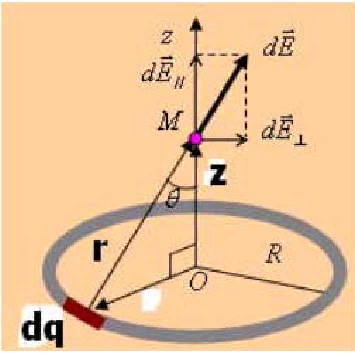
$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} + V_0$$

Pour une distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r} + V_0$$

Pour une distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dV}{r} + V_0$$



Exemple: *Un anneau circulaire de centre O et de rayon R est uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ.*
1. *Déterminer le champ électrostatique créé par cet anneau en un point M de l'axe (Oz).*
2. *Déduire le potentiel électrostatique créé par cet anneau en ce même point M.*

Soit un élément de longueur dl qui porte la charge $dq = \lambda\, dl$. Soit M un point de l'axe (Oz) tel que $OM = z$.
Le champ créé au point M par cet élément est :

$$dE(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad Avec\ \ dq = \lambda\, dl$$

Ce champ est composé de 2 champs: un perpendiculaire à l'axe (Oz) et l'autre, parallèle à (Oz)

$$\overrightarrow{dE}\,(M) = \overrightarrow{dE_\perp}\,(M) + \overrightarrow{dE_\parallel}\,(M)$$

On remarque que, en raison de symétrie de la distribution, la résulante des champs perpendiculaires à l'axe Oz est nulle. Donc, le champ résultant au point M est dirigé suivant Oz tel que :

$$E\,(M) = \sum dE_\parallel = \int dE(M)\cos\theta = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)}\cos\theta$$

Or : $$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Donc : $$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)\sqrt{z^2+R^2}}\oint dl$$

L'intégrale sur toute la distribution est : $\oint dl = 2\pi R$

Finalement : $$E(M) = E(z) = \frac{\lambda\, z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Le potentiel électrostatique :

$On\ a : \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$ et $V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}(r).d\vec{r} = -\int_B^A E(z)\,dz$

$Si\quad B\ est\ à\ l'infini, V_B = 0\ , on\ aura\ V(M) = V(A) = V(z)$

$Finalement :$

$$V(z) = -\int_{\infty}^{z} E(z)\,dz = -\int_{\infty}^{z} \frac{\lambda z}{2\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}} dz$$

$Pour\ résoudre\ cette\ intégrale\ on\ va\ faire\ un\ changement\ de\ variable : X = z^2 + R^2$

$et\ dX = 2z\,dz$

$$V(z) = \int_X^{\infty} \frac{\lambda\,dX}{4\varepsilon_0 X^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Remarque :

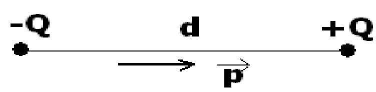
- ☜ $E(0) = 0$ $\quad et \quad$ $V(0) = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$
- ☜ Pour $z \gg R, on\ a : E(z) \approx \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z^2}$ $\quad et \quad$ $V(z) \approx \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z}$
- ☜ Pour $: z = r$ et $\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$ on a : $E(z) \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad et \quad$ $V(z) \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

C'est comme si la charge totale se trouvait concentré au centre O.

V. Dipôle électrostatique:

Définition : il est constitué de 2 charges égales et opposées (+Q et –Q) séparées par une distance d .Il est caractérisé par son moment dipolaire dont le module est :

$$p = Q\ d$$

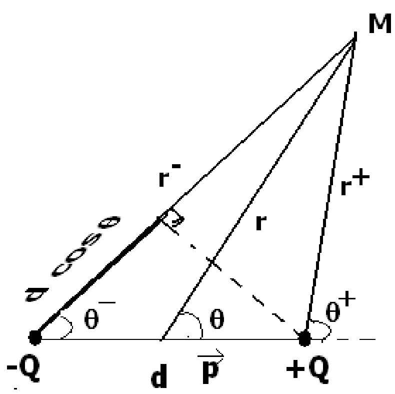


dipôle électrostatique

Le moment dipolaire est une grandeur vectorielle et elle est toujours dirigée de la charge négative (-) vers la charge positive (+).

Potentiel créé par un dipôle :

Soit un dipôle constitué de 2 charges (+Q et –Q) séparées par une distance d. On va calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M de l'espace. On a :



$$V(M) = V^+ + V^- = \frac{kQ}{r^+} - \frac{kQ}{r^-} = kQ\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) = kQ(\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-})$$

Lorsque le point M est très éloigné dans l'espace, on peut faire les approximations suivantes:

$r \ggg d \Longrightarrow \theta \approx \theta^+ \approx \theta^-$

$\Longrightarrow r^- - r^+ = d\,cos\theta$ et $r^- r^+ = r^2$

On obtient finalement:

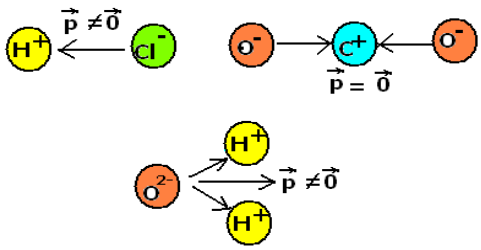
$$\boldsymbol{V(M) = kQ\left(\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}\right) = \frac{kQd\,cos\theta}{r^2} = \frac{kp\,cos\theta}{r^2}}$$

Atome polarisé: Généralement les atomes sont neutres car les centres de masse des charges positives (noyau) et négatives (électrons) sont confondus. Le moment dipolaire est donc nul $\vec{p} = \vec{0}$

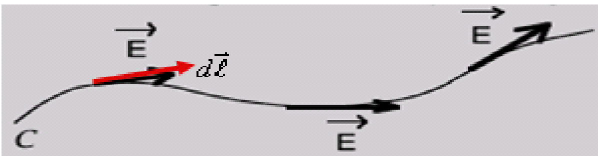
Si un champ électrique est appliqué, il y aura un déplacement des charges et les centres de masse des charges vont se séparer. Le moment dipolaire sera donc différent de zéro ($\vec{p} \neq \vec{0}$). L'atome est dit polarisé.

Molécule polarisée: Certaines molécules possèdent un moment dipolaire permanent car les centres de masse des charges positives et négatives sont tout le temps différents: se sont des molécules polaires.

Exemples: HCl,CO_2,H_2O

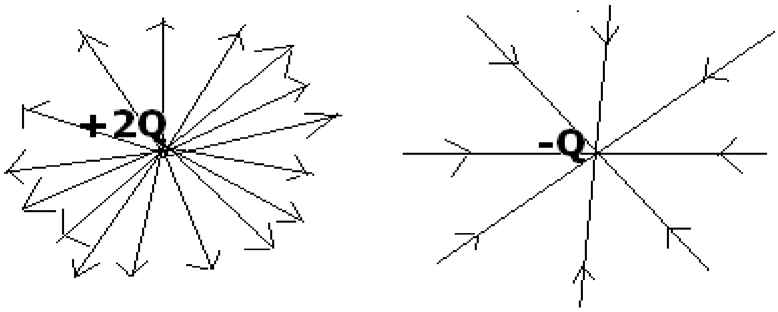


Lignes de champ ou lignes de force : La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point.

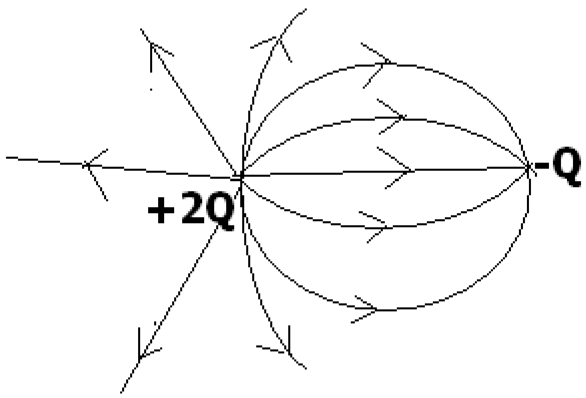


Pour tracer convenablement les lignes de champ certaines règles s'appliquent:

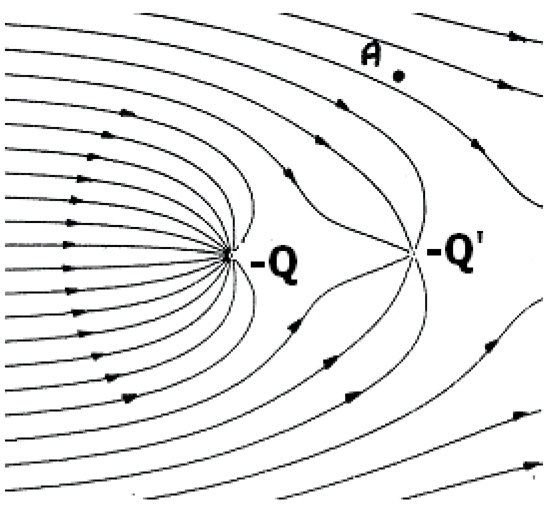
1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.



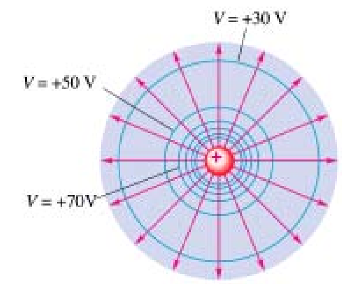
2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge +2Q produit 2 fois plus de lignes qu'en absorbe une charge -Q).

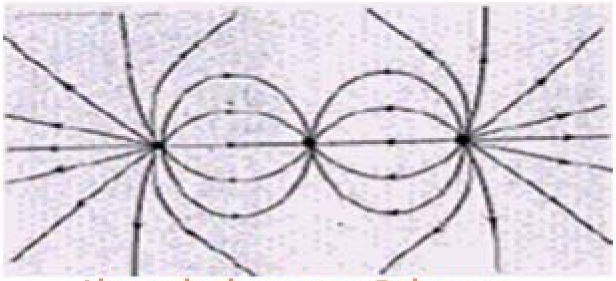


3. Les lignes de champ ne se croisent pas.



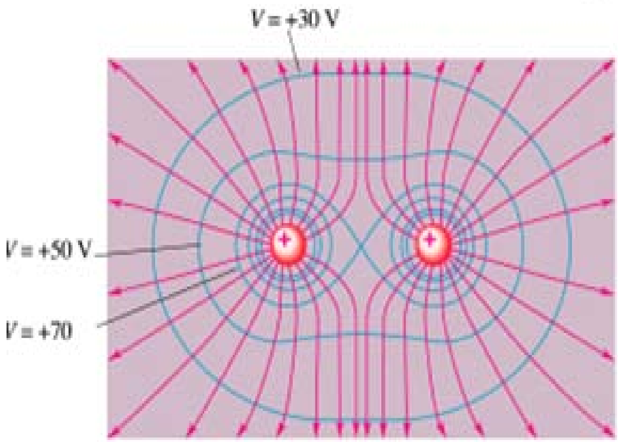
4. **Surfaces équipotentielles**: Les surfaces équipotentielles sont des espaces où le potentiel est constant. Ces surfaces sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ.





Lignes de champ pour 3 charges

Lignes de champ et les surfaces équipotentielles dans un dipôle:



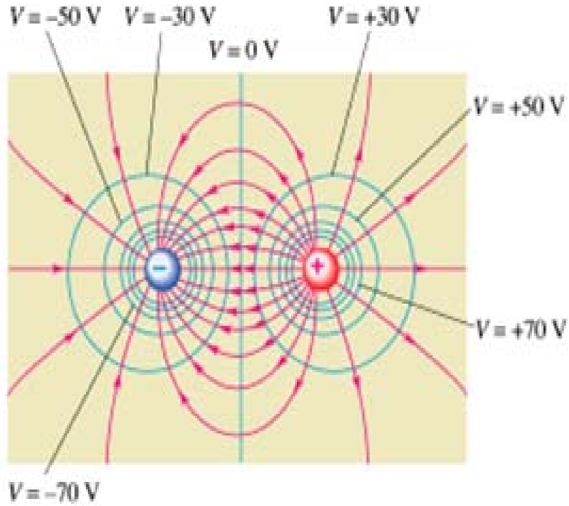
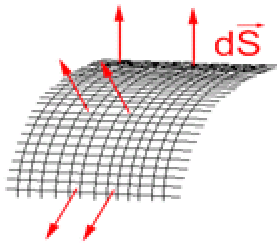


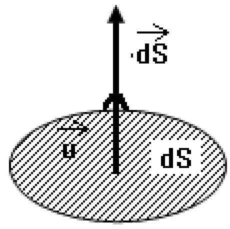
Illustration : En se mettant en contact avec un objet électrifié, les cheveux suivent les lignes de force (de champ).

VI. Théorème de Gauss

Représentation d'une surface: On représente une surface par un vecteur qui est perpendiculaire à cette surface et dont le module est égal à l'aire de cette surface.

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}$$



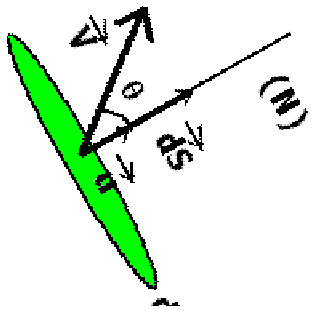


$\overrightarrow{dS}$ est toujours perpendiculaire à la surface et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à dS.

Flux d'un vecteur:

Le flux $d\Phi$ d'un vecteur $\vec{V}$ à travers une surface dS est

donné par la relation : $d\Phi = \vec{V}.\overrightarrow{dS} = .\vec{V}.dS.\vec{u}$

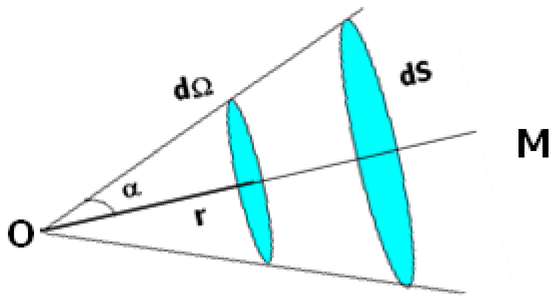


Angle solide:

L'angle solide $d\Omega$ est défini par la relation:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

C'est l'angle sous lequel un observateur voit la surface dS à partir du O. Les surfaces dS sont perpendiculaires à la bissectrice OM.



$d\Omega$ se mesure en stéradians (sr) lorsque dS est en m^2 et r est en m.

Théorème de Gauss:

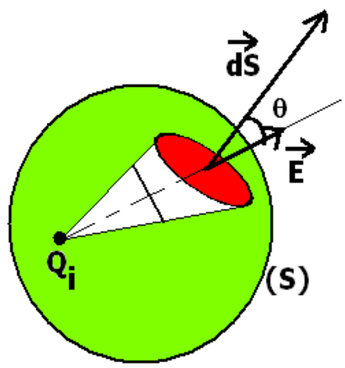
Soit une surface fermée (S) à l'intérieur de laquelle se trouve une charge Q_i. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ (qui est un vecteur) à travers la surface $\overrightarrow{dS}$ est : $d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS.cos\theta$

Or : $E = \frac{kQ_i}{r^2}$

Donc: $d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{kQ_i}{r^2}.dS.cos\theta = kQ_i\,d\Omega$

$\Longrightarrow \Phi = \int \mathrm{k\,Q_i\,d\Omega} = \mathrm{kQ_i} \int \mathrm{d\Omega}$

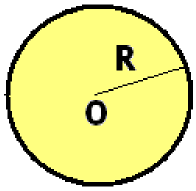
Or : $\int d\Omega = 4\pi$ $(\,pour\ tout\ l'espace),$



Donc : $\Phi = kQ_i \int d\Omega = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

Enoncé : le flux total du champ électrostatique sortant d'une surface imaginaire fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur divisée par ε_0 :

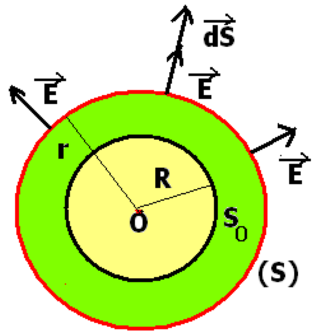
$$\Phi = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$



Ici la surface imaginaire est dite "surface de Gauss" .Elle peut être aussi une surface réelle (sphère, cylindre, plan, ...etc.) Le théorème de Gauss nous aide à calculer le champ électrostatique créé par un ensemble ou une distribution continue de charges.

Exemple: Soit une sphère de centre O et de rayon R. Elle est uniformément chargée en surface (de densité surfacique de charges σ) . Calculer le champ électrostatique créé par cette sphère à l'intérieur de la sphère, sur la surface de la sphère et à l'extérieur de la sphère.

<u>A l'extérieur de la sphère</u>: La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r (r>R). La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est : $Q = \int \sigma \, dS_0 = \sigma \, S_0 = 4\pi R^2 \sigma$ .Le champ électrostatique est perpendiculaire à cette sphère au point considéré.



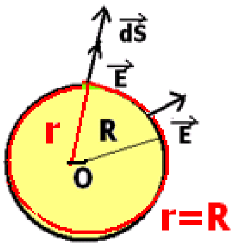
Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

Or la surface de Gauss est : $S = 4\pi r^2$

Donc : $E = \frac{Q}{S \, \varepsilon_0} = \frac{R^2 \sigma}{\varepsilon_0 r^2}$

<u>Sur la surface de la sphère</u>: Ici la surface de Gauss est une sphère réelle (de centre O et de rayon R). Donc r = R.

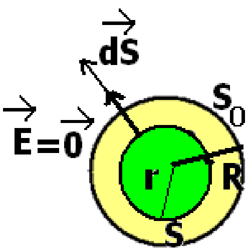


Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

Or la surface de Gauss est : $S = S_0 = 4\pi R^2$

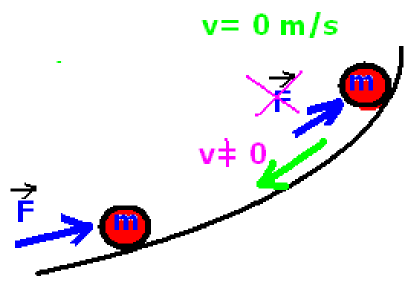
Donc Le champ électrostatique est : $E = \frac{Q}{S_0 \, \varepsilon_0} = \frac{R^2 \sigma}{\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



<u>A l'intérieur de la sphère</u>: La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r (r<R). Le champ électrostatique est perpendiculaire à cette sphère au point considéré. La charge à l'intérieur de cette sphère est nulle (car elle est chargée uniquement sur sa surface).

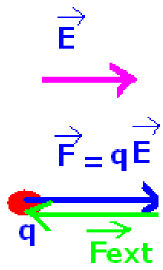
Donc le champ électrostatique est nul aussi à l'intérieur de cette sphère : $E = \frac{Q}{S \, \varepsilon_0} = 0$

VII. Energie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle



En mécanique, si on pousse la masse m jusqu'au point M puis on l'abondonne, elle sera animée d'un mouvement. L'énergie potentielle qu'elle a gagné en altitude sera transformée en énergie cinétique ($v \neq 0 \, {}^{m}/_{s}$ $et \; Ec \neq 0$).

Comme $Ec + Ep = E$ est constante, l'énergie Ec provient d'un autre réservoir énergétique : l'énergie potentielle.



Soit une charge q qui se trouve dans un endroit où règne un champ électrique$\vec{E}$. Elle est soumise à la force électrique $\vec{F} = q \; \vec{E}$.

$$\overrightarrow{F_{ex}} = -q \, \vec{E}$$

Si $\overrightarrow{F_{ex}}$ est la force exterieure qui déplace la charge de (∞)jusqu'au point M, le travail de cette force est égale à l'énergie potentielle électrostatique.

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} dw \;\; = \int_{\infty}^{M} \overrightarrow{F_{ex}}.\overrightarrow{dr} = \int_{\infty}^{M} -q\vec{E} \;\; \overrightarrow{dr} = q[\,V(M) - V(\infty)]$$

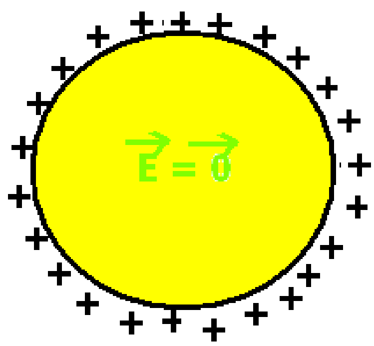
Comme $V(\infty) = 0 \Rightarrow W(M) = q\,V(M)$

N.B:

- l'énergie potentielle ne dépend pas du chemin suivi
- L'énergie électrostatique est le potentiel électrostatique

VIII. Les condensateurs:

Définitions :



Un conducteur est un corps dans lequel les charges peuvent se déplacer librement.

Un conducteur en équilibre est un corps dans lequel les charges sont immobiles à l'intérieur de ce corps et les charges apparentes n'existent qu'à la surface.

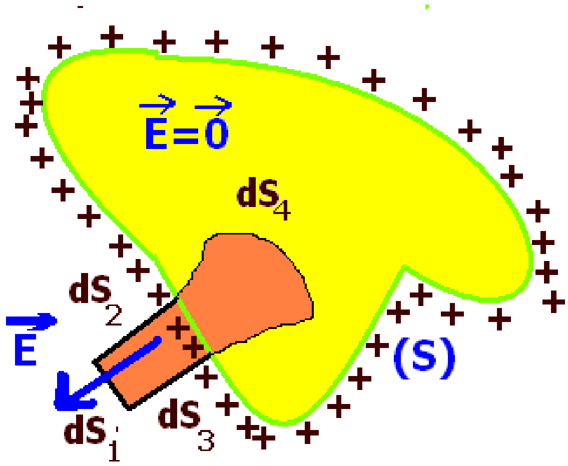
A l'intérieur du corps, le champ électrostatique est nul car s'il est différent de zéro, les charges vont se déplacer et il n'est plus en équilibre.

Champ créé au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique:

Soit un conducteur chargé en équilibre électrostatique et (S) sa surface. Soit σ sa densité surfacique de charge.

A l'intérieur $\vec{E} = \vec{0}$: le potentiel à l'intérieur de ce corps est une constante. La surface fermée (S) est la limite d'un volume équipotentiel. Donc la surface (S) est une surface équipotentielle. Le champ électrostatique au voisinage de (S) est
perpendiculaire à (S).

Calculons le flux de $\vec{E}$à travers la surface
$dS = dS_1 + dS_2 + dS_3 + dS_4$



Le flux est : $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + d\Phi_4$

Avec :

- $d\Phi_1 = \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} = E.dS_1$
- $d\Phi_2 = \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} = 0 \quad Car\ \vec{E}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{dS_2}$
- $d\Phi_3 = \vec{E}.\overrightarrow{dS_3} = 0 \quad Car\ \vec{E}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{dS_3}$
- $d\Phi_4 = \vec{E}.\overrightarrow{dS_4} = 0 \quad Car\ \vec{E}$ est nul à l'intérieur.
  Donc le flux total est:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + d\Phi_4 = E\ dS_1 + 0 + 0 + 0 = E\ dS_1 = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\ dS_1}{\varepsilon_0}$$

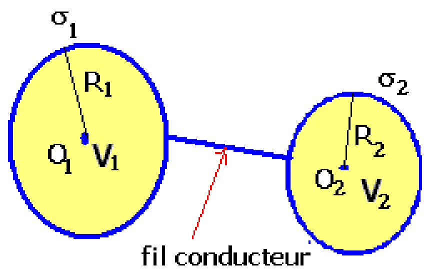
Donc:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Pouvoir de pointes :

Soient 2 sphères de rayons R_1et R_2 et de densités surfaciques de charge (σ_1 etσ_2) qui sont reliées par un fil conducteur (elles sont au même potentiel).

$$V_1 = V_2 \Rightarrow k \iint_{(S1)} \frac{dq_1}{R_1} = k \iint_{(S2)} \frac{dq_2}{R_2}$$



$$\Rightarrow k \iint_{(S1)} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = k \iint_{(S2)} \frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

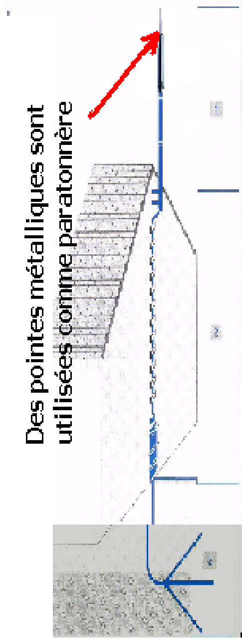
$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 S_1}{R_1} = \frac{\sigma_2 S_2}{R_2}$$

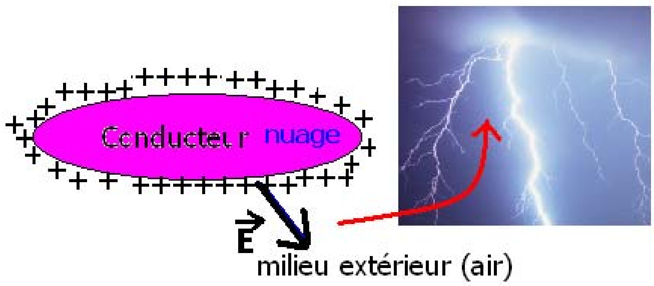
$$\Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \quad car\ S_1 = 4\pi\ R_1^2\ et\ S_2 = 4\pi\ R_2^2 \Rightarrow \sigma R = Constante$$

Lorsque le rayon augmente la densité de charge diminue, donc les charges préfèrent les zones à grande courbure (les charges non compensées ont tendance à se repousser au maximum)

Lorsque le rayon tend vers 0 (pointe), la densité tend vers l'infini et le champ électrostatique aussi.

N.B : Lorsque le champ électrique créé par les charges électriques d'un nuage est supérieur à $3\ MV/m$, il ionise le milieu extérieur (l'air atmosphérique) et produit des décharges électriques (étincelles).





Capacité d'un conducteur isolé :

Soit un conducteur isolé (de densité surfacique de charge σ) en équilibre électrostatique.

La charge est :

$$Q = \iint_{(S)} \sigma dS \Rightarrow V(M) = k \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{R}$$

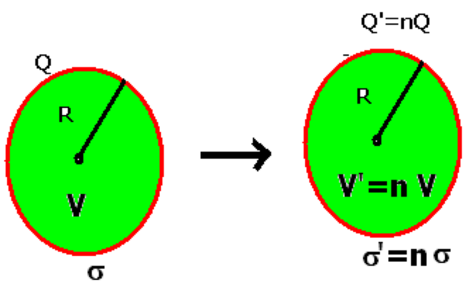
Si on remplace σ par $\sigma' = n\sigma$ on obtient :

$$Q' = \iint_{(S)} \sigma' dS \Rightarrow V'(M) = k \iint_{(S)} \frac{\sigma' dS}{R} = \frac{nk}{R} \iint \sigma\, dS = n\, V(M).$$

Donc si $Q' = n\,Q$, $V' = n\,V$ (V est proportionnel à Q)

$$\frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V} = n = constante\ \ C$$

$$Q\ = \ C\,V$$



La capacité électrostatique d'un conducteur isolé est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V}$$

Q est la charge totale du conducteur isolé porté au potentiel V

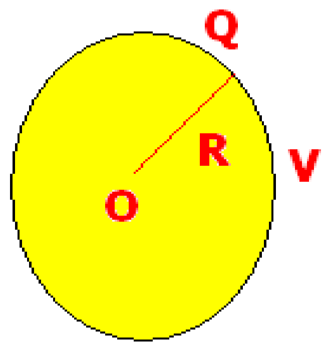
C se mesure en Farads (F)

Remarques :

- C *est toujours positive*
- C *dépend de la géométrie du conducteur*
- C *en* µF *ou en* pF

Exemple :

Calculons la capacité d'une sphère de rayon R chargée en surface (σ) .
Le potentiel créé par cette charge au centre de la sphère est :



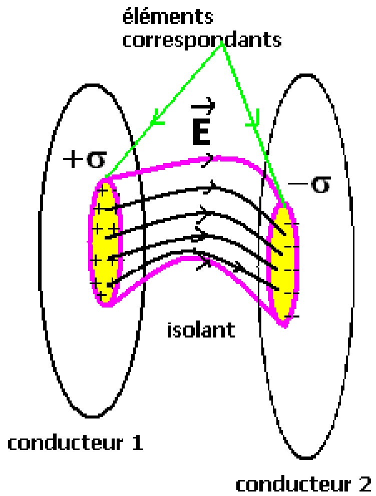
$$V(O) = k\iint_{(S)} \frac{dQ}{R} = k\iint_{(S)} \frac{\sigma\, dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\iint_{(S)} \sigma\, dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

On a :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Influence électrostatique:

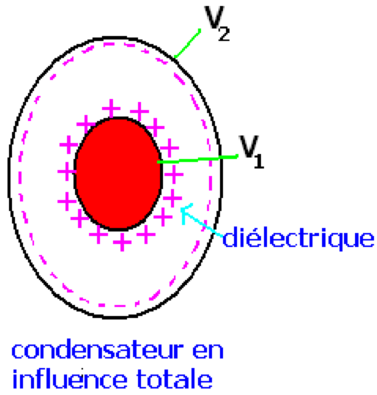
Si on place (on rapproche) 2 conducteurs en équilibre électrostatique dans un milieu isolant (air), ils s'influencent réciproquement de sorte que si l'un porte la charge $+Q$ l'autre portera la charge $-Q$. Les éléments correspondants créent un tube dans lequel règne un champ électrostatique.

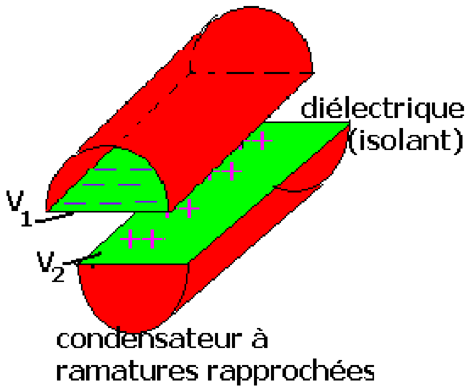


Les condensateurs :

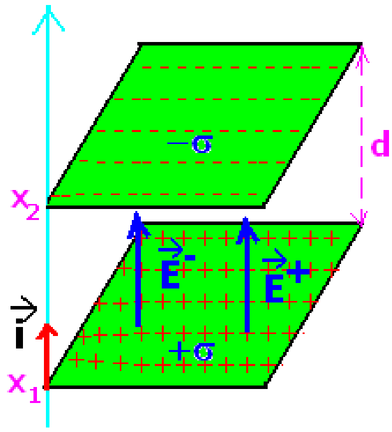
Définition : un condensateur est un système composé de 2 conducteurs en influence électrostatique.

Il y a 2 types de condensateurs : à armatures rapprochées et en influence totale.





Calcul de la capacité des condensateurs :



Condensateur plan : les armatures sont des plans qui portent les charges $+Q$ et $-Q$.

$$d = x_2 - x_1$$

Le champ électrostatique entre les armatures est :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E^+} + \overrightarrow{E^-} = \left(\frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\right) \vec{\imath} + \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\right) (-\vec{\imath}\ ) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{\imath}$$

On a :

$$dV = -E.dr \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} E.dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{S\varepsilon_0} d = \frac{Q}{S\varepsilon_0} d$$

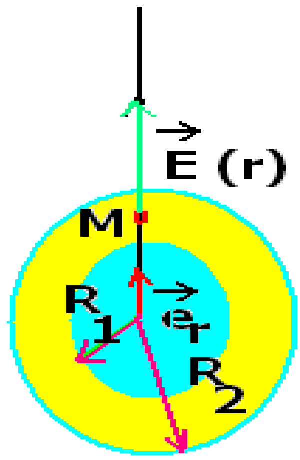
Comme

$$C = Q/V$$

On obtient finalement :

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

Condensateur sphérique :



Entre les armatures le champ électrostatique (en un point M distant de r du centre des sphères) est donné par l'équation :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \overrightarrow{e_r}$$

$$dV = -E.dr \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E.dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

La capacité de ce condensateur est :

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

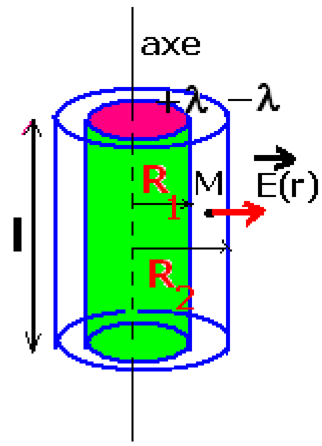
Condensateur cylindrique :

Soient un condensateur formé par 2 cylindres coaxiaux ayant comme densité linéique de charge λ.

Calculons le champ électrostatique qui règne entre les armatures (en un point M distant de r de l'axe) . Si on applique le théorème de gauss on obtient :

$$\phi = \int E.dS = \sum Q_I/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$



Ici S est la surface latérale du cylindre.

Donc :

$$E.2\,\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$$

Le potentiel au point M est donné par l'équation :

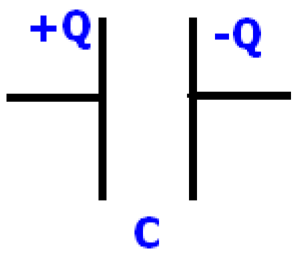
$$dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E.dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi l\varepsilon_0} ln(\frac{R_2}{R_1})$$

La capacité est :

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi l\varepsilon_0}{ln(\frac{R_2}{R_1})} = 2\pi l\varepsilon_0 ln(\frac{R_1}{R_2})}$$

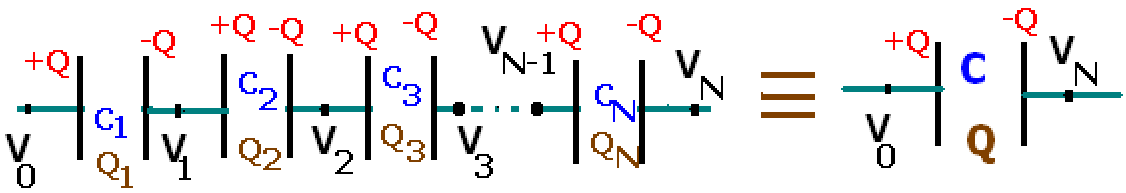
Association des condensateurs :

Les condensateurs sont symbolisés par :



Il y a 2 types de montages : en série et en parallèle.

Association en série : la différence de potentiel entre O et N est :



$$V = V_0 - V_N = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \cdots + (V_{N-1} - V_N)$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{Q_1}{C_1}\right) + \left(\frac{Q_2}{C_2}\right) + \left(\frac{Q_3}{C_3}\right) + \cdots + \left(\frac{Q_N}{C_N}\right) = \frac{Q}{C}$$

Comme les charges sont toutes égales (influence électrostatique), on aura :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

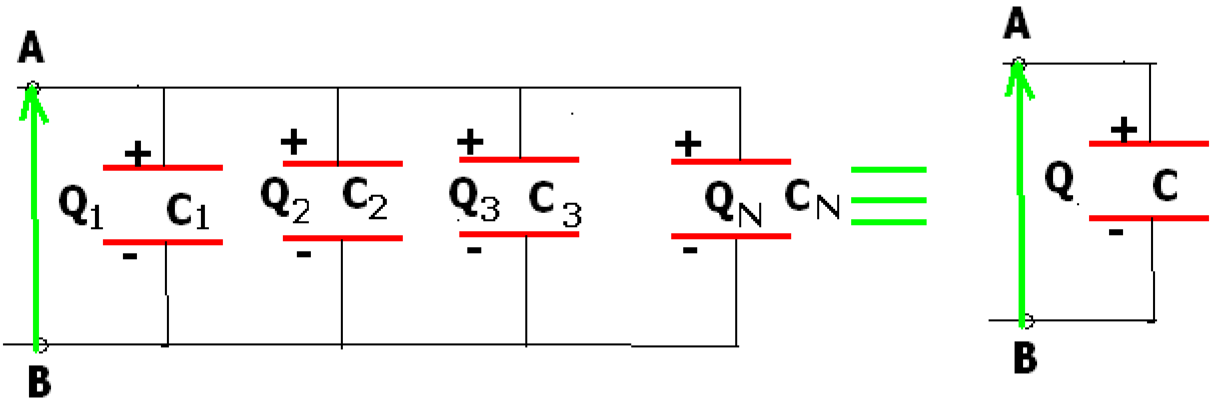
Donc la capacité équivalente C est :

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Association en parallèle :

La charge totale entre les points A et B $(V_A > V_B)$ est égale à la somme de toutes les charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_N$$



$$\Rightarrow (V_A - V_B)C = (V_A - V_B)\, C_1 + (V_A - V_B)C_2 + (V_A - V_B)C_3 + \cdots + (V_A - V_B)C_N$$

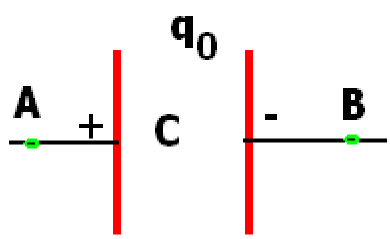
On obtient

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N$$

Donc la capacité équivalente C est :

$$\boldsymbol{C = \sum C_i}$$

Energie d'un condensateur chargé :



Initialement le condensateur n'est pas chargé : $q = 0\ C$. On le charge jusqu'à $q = q_0$. A la fin de l'opération on a :

$$V_A - V_B = q_0 / C$$

.

A un instant donné la charge du condensateur est q et la ddp entre ses bornes est V. On augmente sa charge de dq. Donc , la ddp a augmenté de dV de sorte que :

$$dV = \frac{dq}{C}$$

Pour charger le condensateur de 0 à q_0, on doit fournir une énergie :

$$W = q_0(V_A - V_B)$$

Pour charger le condensateur de q à $q + dq$,il faut fournir l'énergie :

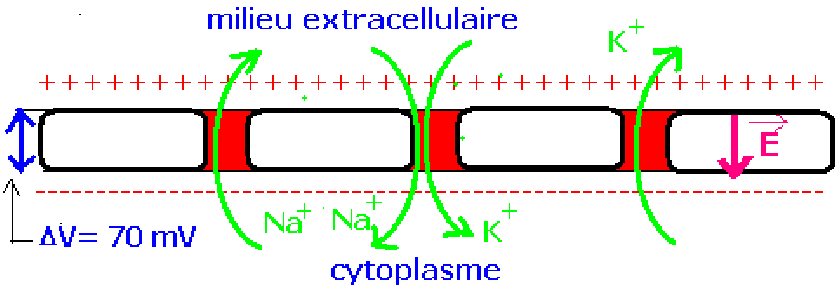
$$dW = dq(V_A - V_B) = dq\frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow W = \int_0^{q_0} \frac{qdq}{C} = \frac{q_0^2}{2\,C}$$

$$\Rightarrow W = (V_A - V_B)^2/2C$$

Condensateurs et potentiels membranaires

Dans la membrane d'une cellule (par exemple un neurone) il y a une différence de potentiel $\Delta V = 70\ mV$ (au repos) à cause d'une différence de flux des ions $Na^+\ et\ K^+$ transmembranaires.



Il y a une accumulation nette de charges des 2 côtés de la membrane (5 millions d'ions pour une cellule de 20 µm de diamètre). L'ensemble forme alors un condensateur.

La charge totale Q portée par la membrane est : $Q = 5\ 10^6\ x1.6\ 10^{-19} = 8\ 10^{\ -13}C$

La capacité C (si on suppose que les faces sont quasi-parallèles) est :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 1.1\ 10^{\ -11}F = 11\ pF$$

Comme l'épaisseur de la membrane est de l'ordre de $e = 70\ nm$, le champ électrostatique dans la membrane est :

$$E = \frac{\Delta V}{e} = 10^6\ V/m \text{ !!!!}$$