CHAPITRE 1

RAPPELS MATHEMATIQUES ET QUELQUES NOTIONS DE BASE UTILES

I. GRANDEURS ET UNITES PHYSIQUES:

I-1- Définitions :

Le mot PHYSIQUE a pour origine « physis » signifiant « NATURE ». La physique étudie les lois des phénomènes matériels (ou naturels) du monde qui nous entoure. Tous les processus naturels observés dans la nature obéissent à des lois bien déterminées. Comme toute autre science, la physique a pour objectif essentiel la découverte et l'étude de ces lois. Donc, les lois de mouvement, d'interaction entre les corps, des phénomènes de l'électromagnétisme…etc. appartiennent au domaine de la physique (la pluie, le vent, la lune tourne autour de la Terre, la Terre tourne autour du Soleil,…etc.).

Les sciences physiques jouent un rôle très important en biologie et en médecine puisque les phénomènes comme l'ouïe, la vue, la tension artérielle…etc. sont des problèmes qui ne peuvent être expliqués sans les lois de la physique.

La physique est une science exacte où les lois sont exprimées par des formules mathématiques. Pour décrire ces lois, la physique fait appel aux « notions » de grandeurs physiques. Chacune d'elles doit être bien définie et nous devons savoir la mesurer .Il existe deux types de grandeurs :

a- **vectorielles** qui sont caractérisées par une direction, un sens et un module (par exemple la force, la vitesse , le champ électrique …..etc.)

b- **scalaires** comme, par exemple, le temps, la masse, la longueur, ….etc.

I-2. Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées :

La mesure de certaines grandeurs physiques exige l'utilisation d'étalons préalablement choisis, par exemple, pour mesurer les distances, il faut être en possession d'un étalon de longueur (le mètre) ; pour mesurer le temps, il faut avoir une horloge étalon synchronisée avec la rotation de la Terre autour de son axe ou du Soleil. Les étalons de grandeurs physiques ne doivent pas varier au cours du temps ou pendant la mesure. Ils sont conservés dans les conditions stationnaires au BIPM (Bureau International des Poids et Mesures). Pour les mesures ordinaires on se sert des copies fidèles de ces étalons. Les grandeurs pour la mesure desquelles on a choisi des étalons sont dites grandeurs « fondamentales ». Le nombre de ces grandeurs fondamentales doit être minimum car il est très difficile de contrôler et d'assurer l'invariabilité des étalons dans le temps. Le reste des grandeurs dont la mesure se ramène à celle des grandeurs fondamentales sont dites grandeurs « dérivées ». Les grandeurs fondamentales doivent être indépendantes entre elles. Par exemple, la longueur et la masse sont indépendantes mais la longueur et la vitesse ne le sont pas puisque la vitesse est fonction de la longueur.

I-3 Système d'Unités International (SI)

L'ensemble des définitions, des méthodes de mesure et des unités des grandeurs fondamentales constitue ce qu'on appelle un système d'unités. Il existe plusieurs systèmes d'unités mais le plus usuel est le système international (SI) où les grandeurs fondamentales sont la longueur **L**, le temps **T**, la masse **M**, l'intensité du courant électrique **I**, l'intensité lumineuse **J**, la température absolue θ, la quantité de matière μ, l'angle plan α et l'angle solide Ω .

Grandeurs et unités fondamentales du Système International

Grandeur	**Symbole**	**Unité**	**Symbole**
Masse	M	Kilogramme	kg
Longueur	L	Mètre	m
Temps	T	Seconde	s
Intensité du courant électrique	I	Ampère	A
Température thermodynamique	θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	Candela	cd
Quantité de matière	μ	Mole	mol.
Angle plan	α	Radian	rd
Angle solide	Ω	Stéradian	sr

Unités fondamentales du Système International réduit (MKSA) :

Les grandeurs fondamentales étant choisies : L, M, T, I et on va définir les unités qui correspondent et de réaliser, si possible, pour chacune d'elle, un étalon qui la représente. Ces unités fondamentales sont :

***Le mètre* (m)** *: En 1960 le mètre est défini comme la longueur égale à 1650763.73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux 2 p_{10} et 5 d $_5$ de l'atome de krypton (86). (Avant, il a été défini comme $1/10^7$ du quart de méridien terrestre).*

***Le kilogramme* (kg)** *: Le kilogramme est la masse du prototype international en platine iridié sanctionné par la première Conférence Générale des Poids et Mesures en 1889 et déposé au Pavillon de Breteuil, à Sèvres. C'est aussi la masse de 10^{-3} m ^{3} de H_2O à son maximum de densité (T= 4°C).*

***La seconde* (s)** *: Elle est définie en 1956 à partir de l'année tropique, qui représente l'intervalle séparant 2 passages consécutifs de la Terre à l'équinoxe du printemps (21 mars). Elle est la fraction 1/31556925.975 de l'année tropique 1900 (l'année julienne contient 365.25 jours et l'année tropique 365.2422 jours). En 1967 on avait définit la seconde comme étant la durée de*

9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental de césium 133.
L'ampère (A) *: C'est l'intensité d'un courant constant qui, passant dans deux fils parallèles , rectilignes, de longueurs infinies, de section négligeables et séparés par une distance de 1 m dans le vide produit entre ces deux conducteurs une force de* 10^{-7} *Newtons par mètre de longueur.*

Préfixes utilisés pour les multiples et les sous-multiples des unités

Pour les sous multiples

Préfixe	Valeur	Symbole
Déci	10^{-1}	d
Centi	10^{-2}	c
Milli	10^{-3}	m
Micro	10^{-6}	µ
Nano	10^{-9}	n
Pico	10^{-12}	p
Femto	10^{-15}	f
Atto	10^{-18}	a

Pour les multiples

Préfixe	Valeur	Symbole
déca	10	da
hecto	10^{2}	h
kilo	10^{3}	k
Méga	10^{6}	M
Giga	10^{9}	G
Téra	10^{12}	T
Pata	10^{15}	P
Ex	10^{18}	E

I. 4. Analyse dimensionnelle :

Dans le système International réduit ou MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère) n'importe quelle grandeur dérivée G peut être exprimée en fonction des grandeurs fondamentales M, L, T et I selon l'expression :

$$[G] = M^{a}.\ L^{b}.\ T^{c}.\ I^{d}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

Exemple :

Vitesse = longueur / temps $\Rightarrow$ $[v] = L\,T^{-1}$

Volume = longueur x largeur x hauteur $\Rightarrow$ $[V] = L^{3}$

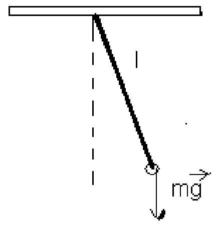
Force = masse x accélération = masse x vitesse /temps $\Rightarrow$ $[F] = M\,L\,T^{-2}$

Travail = force x longueur $\Rightarrow$ $[W] = (M\,L\,T^{-2})\,(L) = M\,L^{2}T^{-2}$

L'expression **$[G] = M^a . L^b . T^c . I^d$** est l'équation aux dimensions de la grandeur **G**. L'analyse dimensionnelle va nous permettre de retrouver facilement les formules physiques et d'éviter les erreurs dues aux unités puisque toutes les relations entre les grandeurs physiques sont homogènes de point de vue dimensions.

Exemple :

Soit un pendule simple de longueur l et de masse m.



Sa période, sa longueur l et l'accélération de la pesanteur sont liées entre elles par une certaine loi physique.

Laquelle de ces expressions est exacte $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ou $T = 2\pi\sqrt{g/l}$?

Sachant que 2π est un nombre sans dimensions, g est une accélération et l une longueur, examinons les équations aux dimensions de ces 2 expressions :

Dans le Système International on a :

$$[T] = T,\ [g] = L\,T^{-2} \text{ et } [l] = L.$$

La formule exacte est celle qui , de point de vue dimensions, est homogène .

Pour $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ on a $T = L^{1/2}/(L^{1/2}T^{-1}) = T$. Donc cette formule est juste.

Pour $T = 2\pi\sqrt{g/l}$ on a $T = (L^{1/2}T^{-1})/L^{1/2} = T^{-1}$. Cette formule est donc fausse.

I. 5. Changement de systèmes de grandeurs :

Pour écrire l'équation aux dimensions d'une grandeur donnée G dans un système de grandeurs fondamentales quelconques différent du SI, on procède comme suit :

1. Ecrire l'équation aux dimensions de la grandeur G dans le SI et dans le nouveau système avec des exposants inconnus.
2. Ecrire les équations aux dimensions de toutes les grandeurs du nouveau système dans le Système International.
3. Déterminer les inconnues par l'analyse dimensionnelle en respectant l'homogénéité des expressions.
4. Ecrire l'équation aux dimensions de G dans le nouveau système d'unités.

Exemple :

Soit un système dans lequel les grandeurs fondamentales sont l'accélération γ, le volume V et la force F . Ecrire les équations aux dimensions de la longueur L et du temps T dans le système γVF ?

Ecrivons d'abord les équations aux dimensions de ces grandeurs dans le système γVF.

On a : $[L] = \gamma^{x} V^{y} F^{z}$ et $[T] = \gamma^{x'} V^{y'} F^{z'}$.

Dans le Système International les équations aux dimensions de toutes ces grandeurs sont :

Pour le temps : $[t] = T$;

Pour la longueur : $[\ l\ ] = L$;

Pour l'accélération : $[\ \gamma\ ] = L\,T^{-2}$;

pour le volume : $[\ V\ ] = L^{3}$ et pour la force : $[F]= M\,L\,T^{-2}$.

Donc, dans le système γVF on a :

Pour la longueur : $[l] = \gamma^{x} V^{y} F^{z}$

$$\Rightarrow \quad L = (L T^{-2})^{x} (L^{3})^{y} (M\,L\,T^{-2})^{z}$$

$$\Rightarrow \quad L = L^{(x+3y+z)}\, M^{z}\, T^{-2(x+z)}$$

Pour que cette équation soit homogène il faut que : $x = 0$, $y = 1/3$ et $z = 0$.

Dans le nouveau système l'équation aux dimensions de la longueur L s'écrit alors :

$[L] = \gamma^{0} V^{1/3} F^{0}$

Pour le temps T on obtient : $T= L^{(x'+3y'+z')} M^{z'} T^{-2(x'+z')}$, ce qui donne $x' = -1/2$,

$y' = 1/6$ et $z' = 0$. L'équation aux dimensions de T dans le nouveau système s'écrit :

$[T] = \gamma^{-1/2} V^{1/6} F^{0}$

II. INCERTITUDES ET CALCUL D'ERREURS :

II.1 Les différents types d'erreurs :

Pour qu'il soit valorisé, tout résultat expérimental doit être suivi d'une estimation sur l'ordre de grandeur de l'erreur globale que l'on a pu commettre. On peut distinguer deux types d'erreurs :

1. Erreurs systématiques : Elles sont dues à une cause bien déterminée et se produisent dans un même sens qui n'est pas toujours connu.

2. Erreurs aléatoires : Elles sont mal définies, varient dans le temps et se produisent de part et d'autre de la valeur vraie.

II.2 Expression des erreurs :

L'erreur peut être exprimée sous forme de :

1. **Erreur absolue** :

   C'est la valeur absolue de l'écart entre la valeur vraie Xv et la valeur mesurée Xm ; X_V étant inconnue, l'erreur absolue l'est également.

L'incertitude absolue ΔX est la limite supérieure de l'erreur absolue.

$$\Delta X = |Xv - Xm| \text{ ou } Xv = X_m \pm \Delta X .$$

ΔX a toujours une unité.

2. **Erreur relative** : C'est le quotient de l'erreur absolue par la valeur vraie. Elle n'est pas connue.

   L'incertitude relative est le quotient de l'incertitude absolue ΔX par la valeur mesurée Xm. Elle nous donne la précision de la mesure et s'exprime par le rapport :

   $$\varepsilon(\%) = 100\Delta X / X_m .$$

II.3 Origine des erreurs :

Les erreurs sont dues généralement à l'appareil de mesure et à l'expérimentateur. On distingue :

- **Erreurs de consommation** : se sont des erreurs systématiques dues à l'introduction de l'appareil de mesure dans les circuits électriques.
- **Erreurs de lecture** : sont la différence entre la valeur indiquée par l'appareil et la valeur lue par l'expérimentateur.

- **Erreurs instrumentales** : sont des erreurs systématiques dues au manque de fidélité de l'appareil. Un appareil de mesure est fidèle lorsque les résultats qu'il donne sont reproductibles. L'erreur instrumentale est donnée par :

$$\Delta X = \frac{classe \text{ x } calibre}{100}$$

Où :

le calibre est la grandeur de la valeur à mesurer qui donne sur le cadran la déviation maximale de l'aiguille.

la classe est le rapport du maximum de l'erreur tolérée sur le calibre de l'appareil. Donc, lorsqu'on change du calibre l'erreur maximale change aussi puisque la classe ne dépend pas du calibre utilisé. La classe est toujours donnée par le constructeur de l'appareil de mesures.

Exemple 1 :

Lorsqu'un voltmètre de classe 0.5 est utilisé sur le calibre 100 Volts, l'erreur instrumentale est : $\Delta V = \frac{0.5x100}{100} = 0.5$ V.

La valeur 0.5 V est l'erreur absolue maximale que l'on peut commettre avec un appareil de cette classe et utilisé sur ce calibre. Cette erreur est la même quelle que soit la déviation de l'aiguille, par contre l'erreur relative varie.

Si $U = 1$ V $\Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = 0.5/1 = 0.5 = 50\%$.

Si $U = 50$ V $\Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = 0.5/50 = 0.001 = 0.1\%$.

Appareil de mesure à déviation : Soit un appareil de mesure à déviation dont l'aiguille indique n graduations sur l'échelle à N graduations.

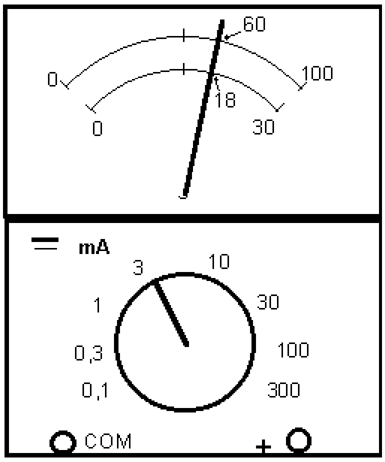
Chaque graduation correspond à une valeur égale au calibre/N.

La lecture sera alors : X = n. Calibre / N.

Donc l'erreur instrumentale est :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{Classe.Calibre}{100}\frac{N}{n.Calibre}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{Classe}{100}\frac{N}{n}$$



Exemple : Calculer l'erreur instrumentale lorsque : N = 100,

classe = 0.5 et X =10 V ; lorsqu'on travaille sur le calibre 100V .

Le nombre de graduations indiqué par l'aiguille n est n = 10x100/100= 10.

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{0.5}{100}\frac{100}{10} = 0.05 = 5\%$$

L'erreur relative est :

L'erreur instrumentale est $\Delta X = 0.05X = 0.5$ V.

Lorsque le voltmètre est utilisé sur le calibre 20 V : n= 100x10/20 = 50,

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{0.5}{100}\frac{100}{50} = 0.01 = 1\%$$

et $\Delta X = 0.1$ V.

On remarque que plus le calibre est grand et plus l'erreur relative sera grande.

II.4 Calcul d'incertitudes :

1[er] Cas : Lorsque la grandeur G est mesurée directement à l'aide d'un appareil de mesure à déviation. Dans ce cas, l'erreur globale commise est l'incertitude de la mesure. Elle est égale à :

$$|\Delta G| = |\Delta G|_s + |\Delta G|_l + |\Delta G|_i$$

Où - $|\Delta G|_s$ est l'erreur systématique

- $|\Delta G|_l$ est l'erreur de lecture

- $|\Delta G|_i$ est l'erreur instrumentale.

2[ème] Cas : Lorsque la grandeur G est déduite de la mesure et des valeurs connues d'autres grandeurs X , Y et Z à partir d'une relation de la forme :

$$G = G(X,Y,Z)$$

L'incertitude absolue s'écrit à l'aide d'une expression analogue à celle de la différentielle totale de $G = G(X,Y,Z)$.

On a $G = G(X,Y,Z)$

$$\Rightarrow dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z} dX + \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z} dY + \left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y} dZ$$

$$\Rightarrow |\Delta G| = \left|\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z}\right| . |\Delta X| + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z}\right| . |\Delta Y| + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y}\right| . |\Delta Z|$$

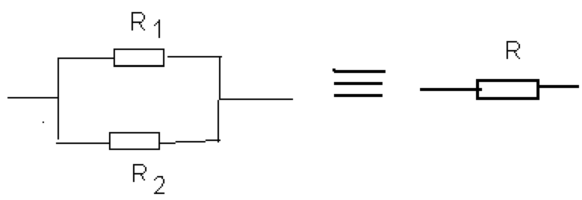
N.B : Conduite à suivre pour le calcul d'incertitude :

1. Expression algébrique des erreurs par les différentielles ou par les différentielles logarithmiques.
2. Groupement des termes semblables lorsque des erreurs liées interviennent.
3. Passage aux incertitudes absolues (en prenant les valeurs absolues des coefficients des erreurs).
4. Calcul numérique et expression du résultat.

Exemple

Soient 2 résistances R_1 *et* R_2 et valant respectivement 10 et 100 Ω. Elles sont mesurées avec une précision de 1%. On les monte en parallèle et la résistance équivalente R est telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Déterminer $R, \Delta R$ et $\frac{\Delta R}{R}$.

On a $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$,

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 100\Omega, R_3 = 1000\Omega$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = 0.01 \Rightarrow \Delta R_1 = 0.1\Omega, \Delta R_2 = 1\Omega et \Delta R_3 = 10\Omega$$

La différentielle totale de R s'écrit :

$$dR = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)_{R_2} dR_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)_{R_1} dR_2$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)_{R_2} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)_{R_1} = \frac{R_1(R_1+R_2) - R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta R = \frac{1}{(R_1+R_2)^2}\left[R_2^2\Delta R_1 + R_1^2\Delta R_2\right]$$

$$\Rightarrow \Delta R = \frac{1}{(10+100)^2}\left[10000x0.1 + 100x1\right] = \frac{1}{11}\Omega$$

La résistance équivalente est :

$$R = \frac{100}{11}\Omega \text{ et } \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{10} = 0.1\Omega = 10\%.$$

On peut obtenir l'incertitude relative en utilisant une expression analogue à celle de la différentielle de la fonction logarithmique.

Exemple : cas précédent

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$\ln R = \ln\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right) = \ln R_1 + \ln R_2 - \ln(R_1+R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1+R_2)}{R_1+R_2} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1+R_2} - \frac{dR_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}\right)dR_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1+R_2}\right)dR_2$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}dR_1 + \frac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}dR_1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}\right|.|\Delta R_1| + \left|\frac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}\right|.|\Delta R_2|$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{100}{10\ x110}x0.1 + \frac{10}{100\ x110}x1 = \frac{1.1}{11} = 0.1 = 10\ \%$$

<u>3ème Cas</u> :

Lorsque les erreurs sont aléatoires (erreurs de sensibilité, de fidélité, ..etc.) on utilise la méthode statistique en répétant n fois la même mesure de la grandeur X et on prend la moyenne

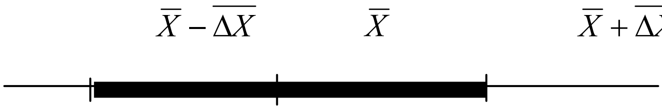
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Chaque mesure s'écarte de la valeur moyenne $\overline{X}$ d'une quantité $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$.

On peut alors prendre comme erreur l'écart moyen $\overline{\Delta X}$ défini par :

$$\overline{\Delta X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

L'intervalle $\left[\overline{X} - \overline{\Delta X}, \overline{X} + \overline{\Delta X}\right]$ s'appelle l'intervalle de confiance de la mesure.

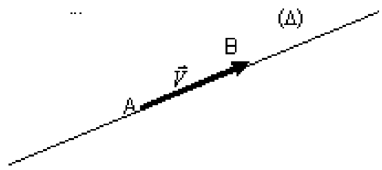


Intervalle de confiance de la mesure

III. LES VECTEURS

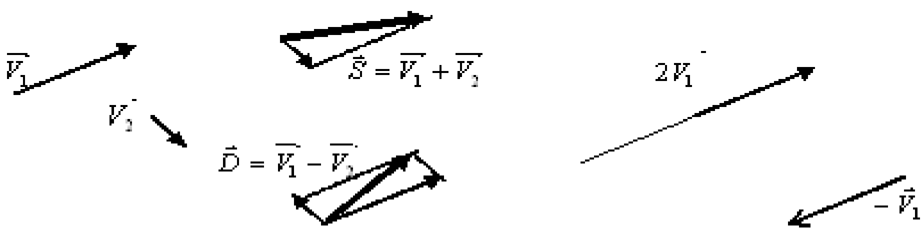
III.1 Définitions :

Un vecteur $\vec{V}$ est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par :



- une direction ou support (Δ)
- un sens
- le point d'application (origine A)
- une extrémité B
- un module (longueur du segment [AB])

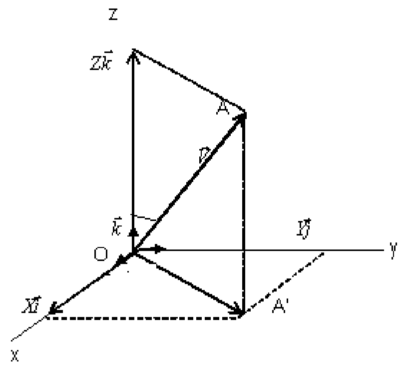
Un vecteur libre est un vecteur qui se déplace librement dans l'espace en gardant la direction, le sens et son module.



III.2. Coordonnées d'un vecteur :

Soit une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On construit le vecteur $\overrightarrow{OA}=\vec{V}$.

Soient :



$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$, les modules des vecteurs unitaires $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$, Ils sont perpendiculaires entre eux et portés respectivement sur les axes Ox, Oy et Oz.

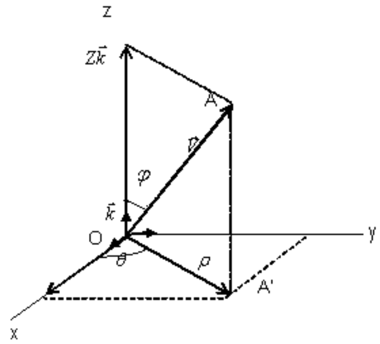
- **Coordonnées cartésiennes** : Le vecteur $\vec{V}$ peut être écrit sous forme d'une somme vectorielle des 3 vecteurs $X\vec{i}$, $Y\vec{j}$ et $Z\vec{k}$.

  On a : $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$.

  Avec :

- $X\vec{i}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Ox.
- $Y\vec{j}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Oy.
- $Z\vec{k}$ est la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe Oz.

$X, Y,$ *et* Z sont des nombres réels et ils représentent les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{V}$.



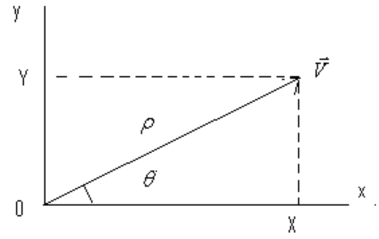
- **Coordonnées cylindriques :** Le vecteur $\vec{V}$ peut être décrit par les grandeurs suivantes :

- $\|\overrightarrow{OA}\|=\|\vec{V}\|=r$, la longueur du segment $[OA]$.
- $\overrightarrow{OA'}$, la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur le plan (xOy) de module $\|\overrightarrow{OA'}\|=\rho$.
- θ est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ et l'axe Ox.
- $Z\vec{k}$ est la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe Oz.

Les grandeurs ρ,θ *et* Z représentent les coordonnées cylindrique du vecteur $\vec{V}$.

- **Coordonnées polaires (dans un plan) :**

  Si Z=0 dans le système de coordonnées cylindriques, on parle alors de <u>coordonnées polaires</u> (ρ,θ) .

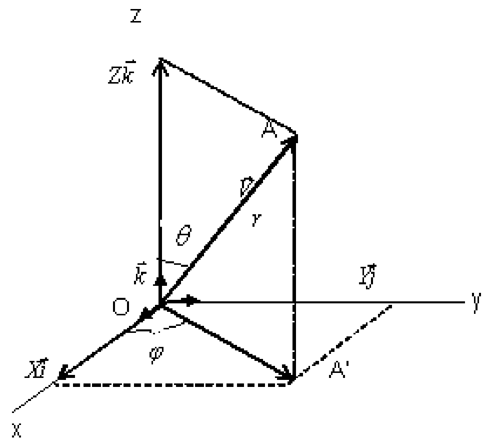


Relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires:

$$\begin{cases} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

- **Coordonnées sphériques :** Le vecteur $\vec{V}$ peut être décrit par les grandeurs suivantes :

- $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\vec{V}\| = r$, la longueur du segment $[OA]$.



- θ est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA}$ et l'axe Oz.

- φ est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ et l'axe Oz.

les coordonnées (r,θ,φ) sont appelées des coordonnées sphériques.

<u>Relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques</u>:

$$\begin{cases} X = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ Y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ Z = r\cos\theta \end{cases}$$

<u>III.3 Propriétés des vecteurs</u>:

Soient, dans une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs $\overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1)$ et $\overrightarrow{V_2}(X_2,Y_2,Z_2)$.

- $\overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1) + \overrightarrow{V_2}(X_2,Y_2,Z_2) = \vec{S}(X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2)$
- $\overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1) - \overrightarrow{V_2}(X_2,Y_2,Z_2) = \vec{D}(X_1-X_2, Y_1-Y_2, Z_1-Z_2)$

- $\lambda\overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1) = \overrightarrow{V_1}(\lambda X_1,\lambda Y_1,\lambda Z_1)$ où $\lambda \in \Re$
- $\overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1) + \overrightarrow{V_2}(X_2,Y_2,Z_2) = \overrightarrow{V_2}(X_2,Y_2,Z_2) + \overrightarrow{V_1}(X_1,Y_1,Z_1)$
- $\overrightarrow{-V_1}(X_1,Y_1,Z_1) = \overrightarrow{V_1}(-X_1,-Y_1,-Z_1)$

<u>III.4 Produit scalaire de deux vecteurs</u> :

Soient les vecteurs $\vec{V_1} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$ et $\vec{V_2} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un scalaire défini par :

$$\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\,.\|\vec{V_2}\|\ \cos(\vec{V_2}\,,\vec{V_2})$$

$$= (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k})\ (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k})$$

$$= X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = \text{scalaire.}$$

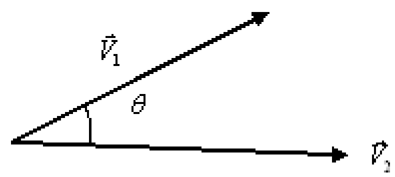
Donc selon le signe de $\cos(\vec{V_2}\,,\vec{V_2})$, le produit scalaire peut être positif, négatif ou nul.

$$\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|\cos\theta$$

Si $\theta = 0$, $\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|$

Si $\theta = \pi$, $\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = -\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|$

Si $\theta = \pi/2$, $\vec{V_1}\,.\,\vec{V_2} = 0$.



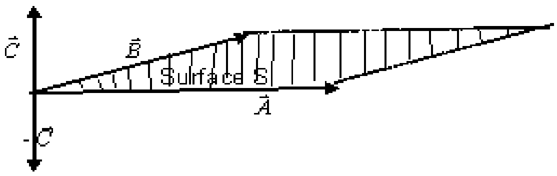
<u>III.5 Produit vectoriel de deux vecteurs</u> :

1. <u>Définition</u> :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un **<u>vecteur</u>** $\vec{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- notation : $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$
- direction : $\vec{C}$ est perpendiculaire à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$ simultanément.
- module : $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.|\cos(\vec{A},\vec{B})|$.
- sens : Le sens de $\vec{C}$ est déterminée par la règle du tire-bouchon
- signification : le module de $\vec{C}$ représente la surface du parallélogramme construit sur la base des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}\right\|.\left|\sin(\vec{A},\vec{B})\right| = \text{surface S.}$$



$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ et $-\vec{C} = \vec{B} \wedge \vec{A}$

N.B : Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition.

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{D})$$

2. Expression analytique du produit vectoriel :

Soient, dans une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs $\vec{A}(X_A, Y_A, Z_A)$ et $\vec{B}(X_B, Y_B, Z_B)$. Soit le vecteur $\vec{C}$ défini par $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.

On a :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) \wedge (X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}) =$$

$$\begin{aligned} & X_A X_B(\vec{i} \wedge \vec{i}) + X_A Y_B(\vec{i} \wedge \vec{j}) + X_A Z_B(\vec{i} \wedge \vec{k}) \\ & + Y_A X_B(\vec{j} \wedge \vec{i}) + Y_A Y_B(\vec{j} \wedge \vec{j}) + Y_A Z_B(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\ & + Z_A X_B(\vec{k} \wedge \vec{i}) + Z_A Y_B(\vec{k} \wedge \vec{j}) + Z_A Z_B(\vec{k} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

Comme $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} & \vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}, \\ & \vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \quad , \\ & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{j} \end{aligned}$$

on obtient $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = X_A Y_B\vec{k} - X_A Z_B\vec{j} - Y_A X_B\vec{k} + Y_A Z_B\vec{i} + Z_A X_B\vec{j} - Z_A Y_B\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (Y_A Z_B - Z_A Y_B)\vec{i} \text{ - } (X_A Z_B - Z_A X_B)\vec{j} + (X_A Y_B - Y_A X_B)\vec{k}$$

Donc les coordonnées de $\vec{C}$ sont : $\begin{cases} X_C = Y_A Z_B - Z_A Y_B \\ Y_C = Z_A X_B - X_A Z_B \\ Z_C = X_A Y_B - Y_A Z_B \end{cases}$

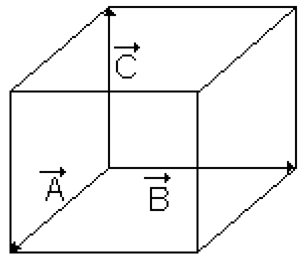
Les coordonnées de $\vec{C}$ peuvent être obtenus facilement en développant par rapport à la première ligne le déterminant suivant :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_A & Y_A & Z_A \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix} = \vec{i}(Y_A Z_B - Z_A Y_B) + \vec{j}(Z_A X_B - X_A Z_B) + \vec{k}(X_A Y_B - Y_A X_B)$$

Ou bien :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_A & Y_A & Z_A \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_A & Y_A & Z_A \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(Y_A Z_B - Z_A Y_B) + \vec{j}(Z_A X_B - X_A Z_B) + \vec{k}(X_A Y_B - Y_A Z_B)$$



III.6 Produit mixte :

Le produit mixte de 3 vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ est un scalaire égal à :

$$M = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\|\vec{C}\| \sin(\vec{B}, \vec{C}) \cos(\vec{A}, \vec{B} \wedge \vec{C})$$

$$= \begin{vmatrix} X_A & Y_A & Z_A \\ X_B & Y_B & Z_B \\ X_C & Y_C & Z_C \end{vmatrix} = X_A(Y_B Z_C - Y_C Z_B) - Y_A(X_B Z_C - X_C Z_B) + Z_A(X_B Y_C - X_C Y_B)$$

La valeur $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})|$ représente le volume du parallélépipède construit sur la base des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$.

III.7 Opérateurs vectoriels :

On définit l'opérateur $\vec{\nabla}$ (NABLA) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Gradient d'une fonction :

Soit une fonction à 3 variables $F(x, y, z)$. Son gradient est défini par :

$$\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla} \cdot F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur.

Divergence d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{A}$ de coordonnées A_X, A_Y et A_Z. La divergence de $\vec{A}$ est définie par :

$$div\ \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_X}{\partial x} + \frac{\partial A_Y}{\partial y} + \frac{\partial A_Z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

Rotationnel d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{A}$ de coordonnées A_X, A_Y et A_Z. Le rotationnel de $\vec{A}$ est un vecteur défini par :

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_X & A_Y & A_Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_Z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_X}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_Y}{\partial x} - \frac{\partial A_X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Le Laplacien :

Soit une fonction à 3 variables $F(x,y,z)$.On définit le laplacien de cette fonction par :

$$\Delta F = div.\overrightarrow{grad}F = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Exemple :

Soient la fonction $F(x,y,z) = 5xy + z^3$ et le vecteur $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{i} + zx^2\vec{j} - yzx\vec{k}$.

Déterminer $\overrightarrow{grad}F, div\vec{A}, rot\vec{A}$ et ΔF.

* $\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla} \cdot F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = 5y\vec{i} + 5x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$

* $div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} == \frac{\partial A_X}{\partial x} + \frac{\partial A_Y}{\partial y} + \frac{\partial A_Z}{\partial z} = 1 - yx$

* $rot\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_X & A_Y & A_Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_Z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_X}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_Y}{\partial x} - \frac{\partial A_X}{\partial y}\right)\vec{k}$

$= (-zx - x^2)\vec{i} + (yz)\vec{j} + (2xz)\vec{k}$

* $\Delta F = div.\overrightarrow{grad}F = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 + 0 + 6z = 6z.$