Chapitre III :

Forces et statique

I : forces

1 définition :

La force est tout cause capable de :

a/ provoquer un mouvement d'un corps.

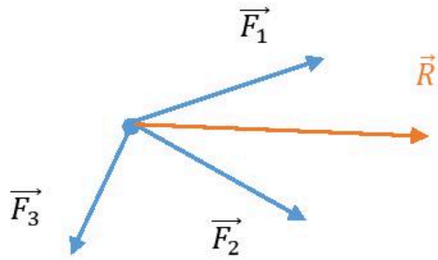
b/ changer le mouvement d'un corps.

c/ déformer un corps, si celui-ci est déformable.

2 compositions des forces concourantes :

Si les forces sont concourantes (appliquer au même point) leurs résultantes est la somme vectorielle

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots . + \overrightarrow{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$$

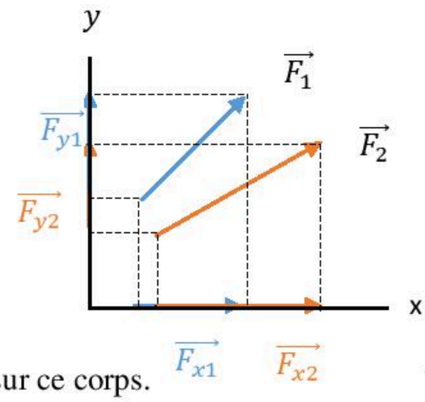


Si les forces sont coplanaires (dans le même plan), soit le plan (o, x, y)

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y}$$

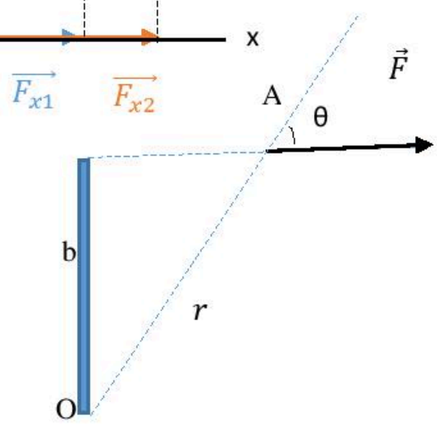
Avec $\overrightarrow{R_x} = \sum \overrightarrow{F_{xi}}$

Et $\overrightarrow{R_y} = \overrightarrow{F_{yi}}$



II : Moment

Soit un corps quelconque, soit une force quelconque exercée sur ce corps.



A : point d'application de la force.

O : point de rotation.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} \quad \begin{cases} O: origine \\ A: extrémité\ (pt\ d'applicationde\ la\ force\ \vec{F}) \end{cases}$$

M=F.b unité [N.m]

Avec $\sin\theta = b/r \rightarrow b = r.\sin\theta$

$M = F.r.\sin\theta$

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \rightarrow \mathbf{M} = \left\| \vec{r} \wedge \vec{F} \right\|$$

1 Définition

Considérons une force $\vec{F}$ agissant sur un corps ‘c’ qui peut tourner autour d’un point ‘O’, si la force ne passe pas par O, elle aura comme effet de faire tourner le corps autour de O.

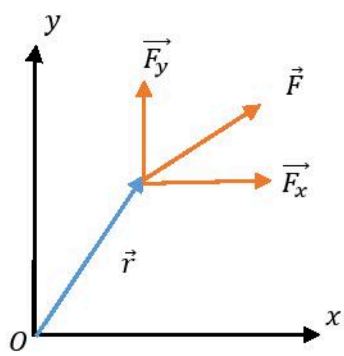
L’expérience montre que l’efficacité de $\vec{F}$ à produire une rotation augmente avec la distance (appeler **bras de levier**) de O à la droite d’action de cette force.

Cette expérience nous permet de définir une grandeur physique appelée M(**moment)** par l’expression : **M=F.b** avec **b :bras de levier**

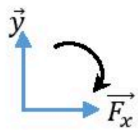
2 Représentation graphique du moment

Si $\vec{r}$ et $\vec{F}$ ∈ au même plan (xoy)

$\overrightarrow{M_{/x}} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_x} = (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \overrightarrow{F_x} = \vec{x} \wedge \overrightarrow{F_x} + \vec{y} \wedge \overrightarrow{F_x}$ avec $(\vec{x} // \overrightarrow{F_x})$ donc $= \vec{x} \wedge \overrightarrow{F_x} = \vec{0}$



$\overrightarrow{M_{/x}} = \vec{y} \wedge \overrightarrow{F_x}$

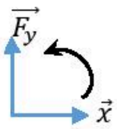


$M_{/x} = y.F_x.\sin\frac{\pi}{2} = - y.\, F_x$

$$\mathbf{M_{/x} = - y.\, F_x}$$

$\overrightarrow{M_{/y}} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_y} = (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \overrightarrow{F_y} = \vec{x} \wedge \overrightarrow{F_y} + \vec{y} \wedge \overrightarrow{F_y}$ avec $(\vec{y} // \overrightarrow{F_y})$ donc $= \vec{y} \wedge \overrightarrow{F_y} = \vec{0}$

$\overrightarrow{M_{/y}} = \vec{x} \wedge \overrightarrow{F_y}$



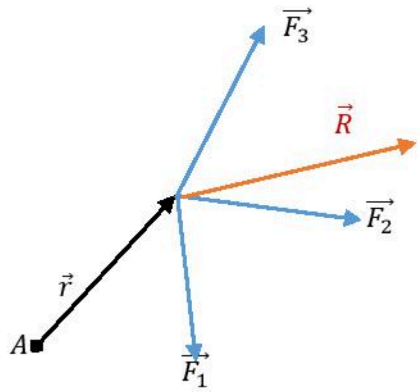
$M_{/x} = x.F_y.\sin\frac{\pi}{2} = x.\, F_y$

$$\boldsymbol{M_{/x} = x.\, F_y}$$

3 Moment de plusieurs forces concourantes

Théorème de Varignon :

Le moment résultant d'un système de forces concourantes par rapport à un point **A** est égale au moment de la résultante de ces forces par rapport à ce point.



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{R}$$

Sachant que : $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots . + \vec{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots . + \vec{F_n}) = (\vec{r} \wedge \vec{F_1}) + (\vec{r} \wedge \vec{F_2}) + .. + (\vec{r} \wedge \vec{F_n})$$

$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \cdots + \vec{M_n}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i}$$

III Principes de Newton

Afin de situer le cadre de la statique, il est intéressant de connaître les lois de la mécanique générale énoncées par I. Newton (1687). Ces lois, qui s'énoncent sous forme de trois principes, postulent les différentes relations entre mouvements et actions mécaniques.

1) Premier principe

Tout corps demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, par rapport à un référentiel Galiléen, sauf si des forces le contraignent d'en changer.

Remarque : Ce principe énonce le principe de l'équilibre des forces qui constitue l'objet essentiel de la statique.

2) Deuxième principe

Par rapport à un référentiel Galiléen, le mouvement d'un point matériel **A** de masse **m** soumis à plusieurs forces, satisfait la relation

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Où γ est l'accélération.

Autrement dit, toute force non compensée, agissant sur un corps est proportionnelle à la masse de ce corps et à son accélération.

Remarque : Le premier principe est un corollaire du second principe. En effet, ce principe montre bien que, lorsque la résultante des forces est nulle il n'y a pas d'accélération.

3) Troisième principe

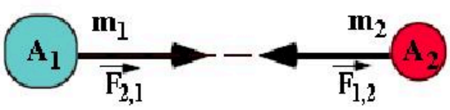
Cette loi énonce le principe de l'opposition des actions réciproques qui dit que la réaction est toujours opposée à l'action. Les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales, parallèles et dirigées en sens contraire.

VI Nature des forces

VI.1 Gravitation et poids

VI.1.1 Définition

La gravitation est une force attractive entre corps matériels. La loi Newtonienne de la gravitation s'énonce de la façon suivante : tout corps matériel $\mathbf{A_1}$ de masse $\mathbf{m_1}$ exerce en toute circonstance, sur tout autre corps $\mathbf{A_2}$ de masse $\mathbf{m_2}$ une force attractive $\mathbf{F_{1,2}}$ égale et opposée à la force attractive $\mathbf{F_{2,1}}$ qu'exerce $\mathbf{A_2}$ sur $\mathbf{A_1}$.



Cette force est définie par la relation suivante :

$$\overrightarrow{F_{1-2}} = -\overrightarrow{F_{2-1}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r_{1-2}}$$

Où $\mathbf{G= 6.67.10^{-11}\ N\ m^2kg^{-2}}$: constante de gravitation universelle. Le singe négatif signale que la force est de sens inverse au vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{r_{1-2}}}$ joignant le corps $\mathbf{A_1}$ au corps $\mathbf{A_2}$. Ceci traduit que la force est attractive.

Si l'on considère un vecteur unitaire $\vec{\boldsymbol{u}}$ sur l'axe reliant les deux corps, il aura comme expression :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{r_{1-2}}}{r}$$

D'où :

$$\overrightarrow{F_{1-2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r_{1-2}}$$

Si **m₂** représente la masse d'un corps distant de la distance « **r** » au centre de la terre cette force ne sera que la force du poids :

$$\vec{p} = m_2\vec{g} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u} = \overrightarrow{F_{1-2}}$$

Par identification nous retrouvons l'expression de l'accélération de la gravité

$$\vec{g} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}$$

Avec : $\mathbf{m_1}$: masse de la terre.

Le poids « p » est évalué en Newton, « N » dans le SI.

VI.1.2 Centre de gravité

Sur chaque particule soumise au champ gravitationnel de la terre s'exerce la force du poids $\vec{p}$ définie précédemment par :

$$\vec{p} = m.\vec{g}$$

Le poids d'un corps constitué de « n » particules est donné par la relation :

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g\sum_{i=1}^{n} m_i$$

Le point d'application de **p** est donné par la relation suivante :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{g\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

On procède de la même manière pour calculer Y_G et Z_G pour un système à trois dimensions x , y, z.

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Le point définit par ces dernières équations est appelé centre de gravité du système de « n » particules.

$$G = (X_G, Y_G, Z_G)$$

Si l'on considère maintenant un système très dense de particules distribuées sur un volume, nous pouvons supposer qu'il s'agit d'une structure continue (un solide) et homogène.

Nous allons alors définir en chaque point du solide la masse volumique « ρ » associée à une infinité d'éléments de volume « **dv** » de masse « **dm** » par la relation :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Les coordonnées du centre de gravité du solide seront alors données par :

$$X_G = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv}$$

$$Y_G = \frac{\int_v \rho y dv}{\int_v \rho dv}$$

$$Z_G = \frac{\int_v \rho z dv}{\int_v \rho dv}$$

Puisque on a considéré que le solide est homogène alors « $\boldsymbol{\rho}$ » est constante on peut la faire sortir de l'intégrale et simplifier l'expression. On obtient :

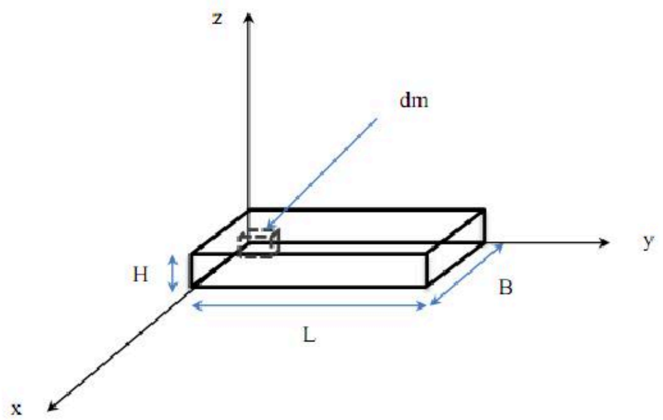
$$X_G = \frac{\int_v x dv}{\int_v dv}$$

$$Y_G = \frac{\int_v y dv}{\int_v dv}$$

$$Z_G = \frac{\int_v z dv}{\int_v dv}$$

Exemple :

Calculer le centre de gravité d'une barre homogène de longueur « L » et de section transversale (B*H).



Considérons un élément de volume **dv = dx dy dz** de masse **dm**.

$$X_G = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv} = \frac{\rho \int_v x dv}{\rho \int_v dv} = \frac{\int_v x dv}{\int_v dv} = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$$

$$X_G = \frac{\int_0^B x dx \int_0^L dy \int_0^H dz}{\int_0^B dx \int_0^L dy \int_0^H dz} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^B [y]_0^L [z]_0^H}{[x]_0^B [y]_0^L [z]_0^H} = \frac{\frac{B^2}{2} * L * H}{B * L * H} = \frac{B}{2}$$

On procède de la même manière pour calculer le $\boldsymbol{Y_G} et \boldsymbol{Z_G}$

On obtient :

$$Y_G = \frac{L}{2} \ et \ Z_G = \frac{H}{2}$$

VI.2 Forces de contact ou réactions d'appuis

De façon générale, les appuis s'opposent aux forces provoquant la mise en mouvement des objets. Nous avons vu que les conditions de la statique conduisent, pour des problèmes plan, à un système de trois équations. Les deux premières traduisent l'équilibre de translation selon les axes du repère, et la troisième, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan, traduit l'équilibre de rotation.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 & (2) \\ \sum M_{/p} = 0 & (3) \end{cases}$$

Lorsque les réactions introduisent trois inconnues, le système n'admet qu'une solution. Il est, dans ce cas, **isostatique**. Lorsque les actions introduisent plus de trois inconnues, le problème est mathématiquement indéterminé. Le système est dit **hyperstatique**. Pour lever l'indétermination, on a besoin d'équations supplémentaires qui sont fournies par la RDM. On ne s'intéresse cette année, qu'à des systèmes isostatiques.

Les appuis réels sont, d'un point de vue microscopique, des systèmes de forces complexes. On peut cependant modéliser ces réactions à l'aide de système de forces simples. On passe en revue, dans ce chapitre, les différents types d'appuis.

VI.2.1 Forces de frottement

Les forces de frottement ont pour effet de s'opposer au déplacement relatif de deux corps se trouvant en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces. On les désigne par "$\mathbf{R_t}$" (réaction tangentielle). Elles dépendent d'une part, de la force normale joignant les deux corps, que l'on désigne "$\mathbf{R_N}$" (réaction normale), et d'autre part, de la nature des surfaces en contact. Le matériau constituant le corps et la rugosité des surfaces sont les principaux paramètres définissant la nature de la surface. Ces deux paramètres sont pris en compte, dans le bilan des forces, par un coefficient, que l'on note **μ**. La force de frottement peut alors se mettre sous une forme simple :

$$R_t = \mu R_N$$

a) Frottements statiques

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles, l'une par rapport à l'autre. Ainsi, lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet maintenu en équilibre par un appui, la force de frottement statique, entre les deux surfaces en contact, croît dans le même temps pour s'opposer au déplacement de l'objet. Cette force ne peut dépasser une valeur limite. On désigne par "$\mathbf{R_{tmax}}$" cette valeur maximale. Ceci implique que pour une valeur limite de la force appliquée, la réaction due au frottement n'est plus suffisante pour empêcher la mise en mouvement de l'objet. Ceci se traduit, pour l'expression de la force de frottement par l'inégalité :

$$R_t \leq R_{tmax} = \mu_s R_N$$

μ_s : Coefficient de frottements statiques.

b) Frottements dynamiques

Lorsque les deux objets sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, une force de frottement persiste et réduit la vitesse de déplacement. Les frottements dans ce cas sont dits dynamiques. Leur expression est la suivante ;

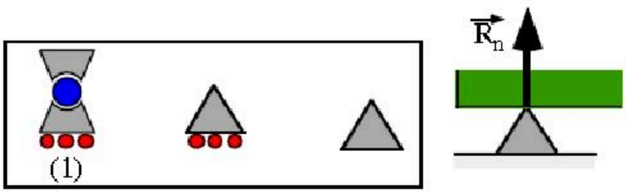
$$R_t = \mu_D \, R_N$$

Ces forces ont une valeur qui est ordinairement inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique.

μ_D : Coefficient de frottements dynamiques, généralement $\mu_s > \mu_D$

VI.2.2 Appuis simples

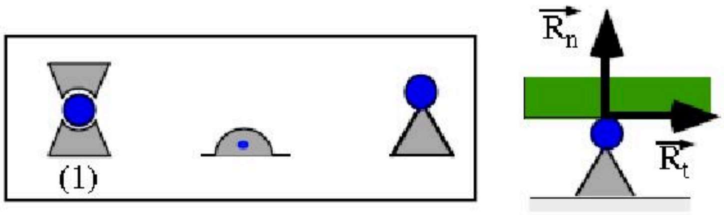
L'appui simple représente les réactions mises en jeu lorsque l'on pose un objet sur un autre. Dans ce cas, la réaction est décrite par une force dont la direction et le point d'application sont connus, la direction étant bien sûr la normale à la surface de contact. Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'intensité de la force. Cette réaction est désignée par différents symboles. On montre ici quelques-uns de ces symboles :



Cet appui permet 2 degrés de liberté : la translation, de la structure étudiée, par rapport à la surface d'appui, et la rotation autour du point d'application. C'est typiquement la situation que l'on rencontre lorsqu'on pose un objet sur un pivot.

VI.2.3 Appuis articulés

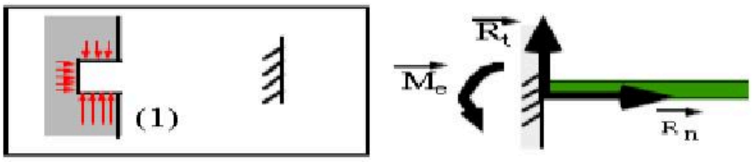
L'appui articulé, également appelé appui double, modélise toutes les liaisons réalisées à l'aide d'une articulation. Contrairement à l'appui simple, on ne connaît pas la direction de la force. Donc, cette fois, on doit déterminer deux inconnues, qui sont l'intensité et la direction.



Cet appui permet 1 degré de liberté, la rotation autour du point d'application. Il est commode de décomposer cette réaction en une composante normale à la surface d'appui et une composante parallèle à cette surface.

VI.2.4 Encastrements

Comme son nom l'indique, l'encastrement est obtenu en emboîtant la structure étudiée.
Dans ce cas, ni la direction ni le point d'application de la force ne sont connus. La méconnaissance du point d'application est due au fait que chaque côté de l'encoche oppose des réactions. En effet, si l'on regarde en détail le contact entre les deux objets (voir le symbole (1) sur la figure suivante), on remarque que chacun des côtés oppose des réactions différentes réparties sur toute la surface de contact. La conséquence de l'ensemble des réactions produites, qui fait tout l'intérêt de ce type d'appui, est d'empêcher toute rotation de la structure. En d'autres termes, il produit un moment contraire aux moments imposés à la structure que l'on appelle moment d'encastrement. Ainsi, pour définir la réaction, on doit déterminer trois inconnues qui sont, l'intensité, la direction, et le moment d'encastrement.



Cet appui ne permet aucun degré de liberté. Cette réaction se décompose en trois éléments qui sont, la réaction normale à la surface d'appui, la réaction parallèle à cette surface et le moment d'encastrement (voir figure).

On peut dire, en guise de conclusion concernant les forces de contact, que le point important dans la description d'une liaison réaliste réside dans le choix de l'appui théorique qui le modélisera le plus fidèlement possible.

VI.3 Forces de frottement d'un fluide (Gaz ou Liquide)

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{k}\,\boldsymbol{\eta}\,\vec{\boldsymbol{v}}$$

K : constante qui dépend de la géométrie du corps en mouvement.

η : viscosité du fluide (dépend de la température).

V : vitesse du corps en mouvement

VI.4 forces de rappel ou d'élasticité

C'est la force qui fait retourner le corps en mouvement à un point

fixe (exp : tension de ressort, des fils des câbles..)

$$\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$$

k : constante d'élasticité (dépend de la matière).

$\overrightarrow{OM}$: Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$$T = -k\Delta l$$

V état d'équilibre

V.1 Équilibre d'une particule

Équilibre de translation $\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$

V.1 Équilibre d'un solide

Équilibre de translation $\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$

Équilibre de rotation $\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{0}$

Système isostatique : le nombre d'inconnue est égale au nombre d'équation.

Système hyperstatique : le nombre d'inconnue est supérieure au nombre d'équation.

IV l'ensemble des coordonnées

1. **définition**

   L'ensemble des coordonnées nous aide à localiser n'importe quel point dans le plan ou dans l'espace