Chapitre 3

Probabilité conditionnelle

3.0.6 Probabilité conditionnelle

Exemple

Le jet de 2 dés, peut donner 36 résultats possibles avec lesquels on peut construire l'ensemble fondamental:

$$S = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\}$$

Supposons que le premier dé a donné 3. Quelle est la probabilité que la somme des 2 dés donne 8?

Avec cette condition, il ne peut y avoir que 6 résultats possibles:

$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$

chacun avec une probabilité 1/6.

Pour les 30 autres résultats, la probabilité (conditionnelle) est devenue 0.

Donc la probabilité cherchée est 1/6.

Cette probabilité qu'on vient de calculer s'écrit $P(E \mid F)$: probabilité conditionnelle que E apparaisse sachant que F est réalisé, avec E="la somme des 2 dés est 8" et F="le premier dé donne 3".

Généralisation

On montre que:

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

($P(F) > 0$). En effet, si F est réalisé, E apparaîtra chaque fois que E et F sont réalisé, on a donc un événement de $E \cap F$.

D'autre part, on sait que F est réalisé, F devient alors le nouveau ensemble fondamental (réduit):

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} = \frac{P(E \cap F}{P(F)}$$

Exemples

Exemple 1:

En reprenant l'exemple précedent, quelle est la probabilité que la somme de 2 dés donne 8 sachant que le premier a donné 3?

Dans ce cas, on a:

$$E = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)(6,2)\}$$
$$F = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$
$$P(E|F) = \frac{P(\{(3,5)\})}{P(F)} = \frac{1}{6}$$

Exemple 2: Un sac contient 10 boules blanches, 5 jaunes et 10 noires. Quelqu'un tire une boule au hasard du sac, il voit la boule et nous dit que la boule n'est pas noire.

Quelle est la probabilité que cette boule soit jaune?

Réponse:

- Première méthode:

On définit les événements suivants de l'ensemble fondamental:

J = "la bille est jaune"

N = "la bille est noire"

La probabilité qui nous intéresse est la probabilité conditionnelle:

$$P(J \mid N^c) = \frac{P(J \cap N^c)}{P(N^c)} = \frac{P(J)}{1 - P(N)} = \frac{5/25}{1 - 10/25} = \frac{1}{3}$$

- Deuxième méthode:

On peut aussi travailler directement avec l'ensemble fondamental réduit. La boule choisie n'est pas noire, il reste donc 15 boules dont 5 jaunes. D'où une probabilité 1/3 de tirer une boule jaune.

Autre application

On peut utiliser la formule précédente dans le sens inverse.

$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E \mid F)$$

Le calcul de $P(F)$ et $P(E \mid F)$ est parfois plus facile.

Exemple: Une boite contient 8 boules rouges et 4 blanches. On tire sans remise deux boules. Quelle est la probabilité que les deux boules soient rouges?

• R_1 = "la première boule tirée est rouge"

R_2 = "la deuxième boule tirée est rouge"

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

• On peut aussi écrire:

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{C_2^8}{C_2^{12}} = \frac{14}{33}$$

3.0.7 Formule de Bayes

Formule des probabilités totales

Soient E et F deux événements quelconques. On a: $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$ qui s'exclut mutuellement. Par l'Axiome 3, on a:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(F) \cdot P(E \mid F) + (1 - P(F)) \cdot P(E \mid F^c) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Généralisation

Soient $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des événements mutuellemnt exclusifs mais tels que $\cup_{i=1}^n F_i = S$, c'est à dire un seul événement F_i peut se produire. On dit qu'on a une partition de S.

En ecrivant $E = \cup_{i=1}^n (E \cap F_i)$ qui s'exclut mutuellement. On obtient:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) \cdot P(F_i) \tag{3.2}$$

Formule de Bayes

On considère une partition de S: $S = \cup_{i=1}^{n} F_i$. Supposons qu'un événement E s'est réalisé. On veut connaitre la probabilité que l'un des F_j se soit aussi réalisé. Cette probabilité est donnée par la formule de Bayes:

$$P(F_j \mid E) = \frac{P(E \mid F_j)}{P(E)} = \frac{P(E \mid F_j) \cdot P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) \cdot P(F_i)}$$

Exemple:

On considère 3 cartes de jeu: RR, NN et RN. La carte RR a deux faces rouges, ... On mélange les trois cartes, on tire une au hasard, et on ne regarde qu'une seule face.

Si la face qu'on voit est rouge, quelle est la probabilité que l'autre face soit noire?

Réponse:

$RR =$ "la carte est entièrement rouge"

$NN =$ "la carte est entièrement noire"

$RN =$ "la carte est Rouge-Noire"

RR, NN et RN forme une partition de l'ensemble fondamental.

$R =$ "la face qu'on voit est rouge"

La probabilité qu'on cherche est:

$$\begin{aligned} P(RN \mid R) &= \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(R \mid RN) \cdot P(RN)}{P(R \mid RR) \cdot P(RR) + P(R \mid NN) \cdot P(NN) + P(R \mid RN) \cdot P(RN)} \\ &= \frac{1/2 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.0.8 Evénements indépendants

Définition:

Deux événements E et F sont dits indépendants si $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$, c'est à dire $P(E \mid F) = P(E)$.

Le fait que F se soit réalisé n'influt pas sur la probabilité de E.

Théorème:

Si E et F sont deux événements indépendants, alors E et F^c le sont aussi.

Preuve:

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$, union de deux événements mutuellement exclusifs. D'où:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c) = P(E) \cdot P(F) + P(E \cap F^c)$$

qui donne:

$$P(E \cap F^c) = P(E) \cdot (1 - P(F)) = P(E) \cdot P(F^c)$$

Lorsque E est indépendant de F, la probabilité que E survienne n'est influencée ni par l'information que F est réalisé ni par celle que F n'est pas réalisé.

Définition:

En général, un ensemble de n événements $E_1, E_2, \cdots, E_n$ est dit totalement indépendant si pour tout sous-ensemble de r ($r \leq n$) événements $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_r}$, on a:

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdots P(E_{i_r})$$

Exercice:

Soient E, F et G 3 événements totalement indépendants. Montrer que:

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F \cap G)$$

et de même pour n'importe quel événement formé à partir de F et G.

Théorème:
(a) $0 \leq P(E \mid F) \leq 1$
(b) $P(S \mid F) = 1$
(c) Si $E_i, i = 1, 2, \cdots, n$ sont des événements qui s'exclut mutuellement, alors:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i \mid F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i \mid F)$$

Donc la fonction $P(\cdot \mid F)$ est une fonction de probabilité. On peut donc lui appliquer tous les résultats qu'on a démontré auparavant.

Propriété:
Si E_1, E_2 et F sont trois événements, on a alors:

$$P(E_1 \mid F) = P(E_1 \mid E_2 \cap F) \cdot P(E_2 \mid F) + P(E_1 \mid E_2^c \cap F) \cdot P(E_2^c \mid F)$$

Exercice:
Trois machines A, B et C produisent des composants. 10% des composants de A sont défectueux. 20% des composants de B sont défectueux. 30% des composants de C sont défectueux.

On forme des paquets de ces composants en mettant un nombre égal de composants de A, de B et de C.

1) Un composant est pris au hasard d'un paquet quelconque. Quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux?

Réponse: On définit les événements suivants:
- F="le composant est défectueux"
- M_A = "le composant sort de la machine A", M_B = "le composant sort de la machine B" et M_C = "le composant sort de la machine C".

$\{M_A, M_B, M_C\}$ forment une partition de S.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \mid M_A)P(M_A) + P(F \mid M_B)P(M_B) + P(F \mid M_C)P(M_C) \\ &= 0,1 \cdot 1/3 + 0,2 \cdot 1/3 + 0,3 \cdot 1/3 = 20\% \end{aligned} \tag{3.4}$$

2) Un composant est pris au hasard d'un paquet. On trouve qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité que ce composant a été fabriqué par la machine A?

Réponse:

$$P(M_A \mid F) = \frac{P(F \mid M_A)P(M_A)}{P(F)} = \frac{0,1 \cdot 1/3}{0,2} = \frac{1}{6}$$

Exercice:
On fait le jet de 3 pièces de monnaie. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'au moins un "face" sorte sachant qu'on va avoir au moins un "pile"?

Réponse:
- A = "événement d'avoir au moins un face"
- B = "événement d'avoir au moins un pile"

$$P(A) = 1 - P(\{ppp\}) = 7/8$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\{fff\}) - P(\{ppp\}) = 6/8$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 6/7$$

Exercice:
Une boite contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire d'abord au hasard 2 boules de la boite. Ensuite, on tire au hasard une troisième boule de la manière suivante:
- si l'une des 2 premières boules est blanche, on tire une troisième boule de la boite sans remettre les 2 premières,
- sinon, on remet les 2 premières boules et on tire la troisième.

Quelle est la probabilité que la troisième boule soit noire?
Réponse:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N \mid NN)P(NN) + P(N \mid NB)P(NB) + P(N \mid BB)P(BB) \\ &= \frac{C_1^6}{C_1^{10}} \cdot \frac{C_2^6}{C_2^{10}} + \frac{C_1^5}{C_1^8} \cdot \frac{C_1^6 \cdot C_1^4}{C_2^{10}} + \frac{C_1^6}{C_1^8} \cdot \frac{C_2^4}{C_2^{10}} \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{15}{45} + \frac{5}{8} \cdot \frac{24}{45} + \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{45} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{19}{30} = 63\% \end{aligned} \tag{3.5}$$

Exercice:
Une compagnie d'assurrance estime que les gens sont répartis en 2 catégories:
- ceux qui sont soumis aux accidents: 30%
- ceux qui ne le sont pas: 70%

Des statistiques montrent que 40% des premiers risquent d'avoir un accident dans l'espace d'un an, cette probabilité tombent à 20% pour la deuxième catégorie.

1) Quelle est la probabilité qu'une nouvelle personne (qui veut s'assurer) soit victime d'un accident durant l'année qui va suivre?

Réponse:
On désigne par:
A_1 = "la personne aura un accident dans l'année qui va suivre"
A= "la personne est soumise aux accidents"

$$P(A_1) = P(A_1 \mid A) \cdot P(A) + P(A_1 \mid A^c) \cdot P(A^c) = 26\%$$

2) Si une personne aura un accident dans l'année qui suit. Quelle est la probabilité qu'elle fasse partie de la première catégorie?

$$P(A \mid A_1) = \frac{P(A) \cdot P(A_1 \mid A)}{P(A_1)} = 46\%$$

Exercice:
On analyse les résultats d'un examen avec des réponses à choix multiples: c'est à dire à chaque question, on propose m réponses dont une seule est correcte.

On sait qu'un l'éléve en répondant correctement soit connait vraiment la réponse, soit la devine. On estime que la probabilité pour qu'il connaisse vraiment la réponse est p.

D'autre part, on admet que la probabilité de deviner une réponse correcte, est de $1/m$ où m est le nombre de réponses proposées.

Quelle est la probabilité conditionnelle qu'il connaisse effectivement le réponse à une question s'il a répondu correctement?

Réponse:
C= "il répond correctement à la question"
K= "il connait vraiment la réponse"
Alors:

$$\begin{aligned} P(K \mid C) &= \frac{P(C \mid K) \cdot P(K)}{P(C \mid K) \cdot P(K) + P(C \mid K^c) \cdot P(K^c)} \\ &= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 1/m \cdot (1-p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m-1)p} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si $m = 5$ et $p = 60\%$ alors $P(K \mid C) = 88\%$

On peut dire que 88% seulement des personnes qui répondent correctement aux réponses connaissait vraiment les réponses exactes.

<u>**Exercice**</u>:
Supposons que $\{F_i\}$ est une partition de S.
A_1 et A_2 2 événements quelconques de F.
Etablir la relation suivante:

$$P(A_2 \mid A_1) = \sum_i P(A_2 \mid A_1 \cap F_i) \cdot P(F_i \mid A_1)$$